Mathématiques : cultiver la diversité mais avec qui et dans quelle perspectives ?

Jean-Pierre BOURGUIGNON

Professeur honoraire Nicolaas Kuiper à l'Institut des Hautes Études Scientifiques

25ème anniversaire d'Animath, Institut Henri Poincaré, 16 mars 2024

Je suis très honoré que vous m'ayez proposé d'intervenir lors de cette cérémonie visant à célébrer 25 ans d'Animath. Cette association exemplaire par son engagement dans la durée a mené des actions sous beaucoup de formes, toutes avec pour objectif de mieux faire connaître les mathématiques et de donner un accès plus facile à leurs différentes facettes à des publics différents, notamment de jeunes.

En 25 ans vous avez accumulé un nombre considérable d'expériences qui sont autant de sources d'inspiration pour beaucoup d'autres personnes partageant vos objectifs. Je suis l'une d'elles, et c'est donc avec humilité que j'ai rassemblé pour cette occasion certaines expériences que j'ai eues dans cet esprit. Voici donc quelques pistes que j'ai suivies pour faire vivre les mathématiques.

D'abord, comment suis-je arrivé au titre, maladroit, *« Mathématiques : cultiver la diversité mais avec qui et dans quelles perspectives ? »* que j'ai donné à cette présentation. Beaucoup d'entre vous savent que nombre de personnes pratiquant les mathématiques, y compris au plus haut niveau, sont d'une certaine façon obsédées par la quête de leur unité. C'est ainsi, et ce n'est peut-être pas bien connu, que David HILBERT termine sa fameuse liste des 23 problèmes présentés lors du deuxième Congrès international des mathématiciens qui s'est tenu en 1900 à Paris par la phrase : « *L'unité organique des mathématiques est inhérente à la nature de cette science, car les mathématiques sont le fondement de la connaissance exacte des phénomènes naturels ».*

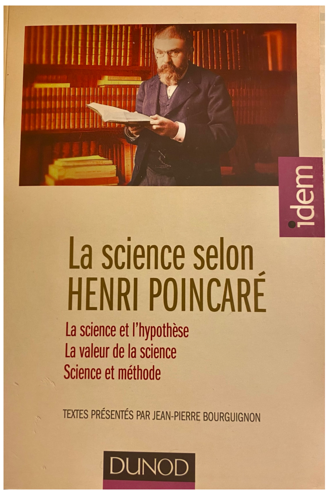
Un autre mathématicien qui n'a eu de cesse de défendre cette unité est Sir Michael ATIYAH – je le cite plus loin pour sa contribution pour le livre *Les Déchiffreurs*. Il était dès lors légitime que la conférence pour honorer sa mémoire ait été intitulée *« L'unité des mathématiques ».*

Dans son essai pour ce livre, Alain CONNES dit aussi quelque chose de cet ordre quand il écrit : *« un trait essentiel du monde mathématique est qu'il est impossible d'en isoler une partie sans le priver de son essence ».*

Peu après, il introduit l'idée suivante : *« on ne devient pas mathématicien en apprenant, on devient mathématicien en faisant des mathématiques. Donc, ce n'est pas le « savoir » qui compte, ce qui est important, c'est le savoir-faire ».* Ainsi est lâchée l'expression *« faire des mathématiques »*, un des chantiers d'Animath.

Nous touchons là en effet à une question essentielle qui nous permet d'ailleurs de nous connecter avec Henri POINCARÉ – impossible de faire autrement en ces lieux – pour qui *« la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes ».*

On trouve cette affirmation dans *Science et méthode*, un des trois livres, avec *La Science et l'hypothèse* et *La valeur de la science,* de son triptyque merveilleux écrit au début du 20ème siècle pour donner accès aux mathématiques de son temps et republié par Dunod en 2013.



Cela nous encourage à *« cultiver la diversité »*, au moins du point de vue des objets mathématiques. Mais on doit envisager bien d'autres façons de considérer la diversité : quels sont les divers processus mathématiques ? quelles sont les diverses pratiques des mathématiques ? qui sont les personnes qui font des mathématiques ? mais aussi comment les introduit-on à des personnes qui vivent hors des mathématiques ?

Ces différentes questions sont bien souvent intimement reliées entre elles, comme je vais essayer de le montrer dans la promenade que je vous propose.

Cultiver la diversité

L'histoire de π, un sujet un peu incontournable en cette semaine du « Jour de π » célébré dans le monde entier, nous offre beaucoup d'angles sous lesquels des contributions à la connaissance de π se sont étalées sur plusieurs millénaires. Une superbe occasion de valoriser la **diversité culturelle** !

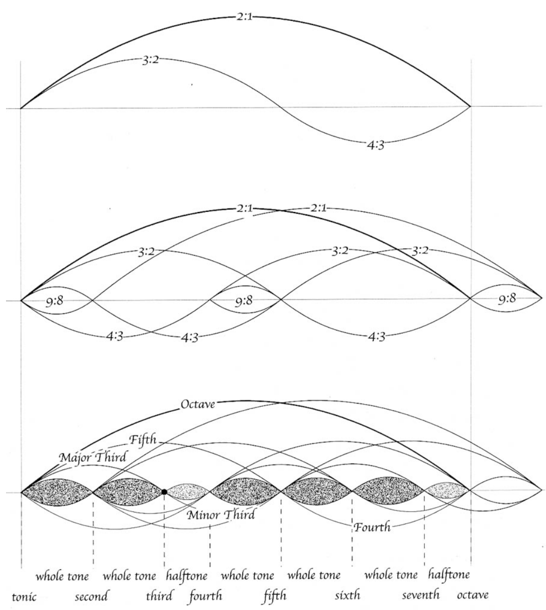
D'où sort π ? Du défi de déterminer le rapport de la circonférence d'un cercle à son rayon. C'est d'abord une énigme pratique : quelle est sa valeur ? Diverses cultures ont formulé des valeurs de plus en plus précises, donnant l'occasion d'enrichir la notion de nombre comme le formulation impliquant la première forme des fractions chez les Babyloniens il y a plus de 3500 ans. Cet approfondissement a aussi mobilisé des connaissances géométriques de plus en plus fines pour aboutir finalement à l'établissement par ARCHIMÈDE de la valeur approchée 3,14, enseignée partout dans le monde.

Mais l'exploration de la nature mathématique plus profonde de π n'a eu de cesse depuis l'Antiquité. La question de la « quadrature du cercle » apparaît déjà chez EUCLIDE. Ces efforts passent inévitablement par une réflexion sur ce qu'est un nombre et quels sont les nombres acceptables. Finalement il a été établi en 1761 que π était un nombre irrationnel.

Or ces nombres étaient des hérésies inacceptables pour les Pythagoriciens au point de récuser comme nombre la mesure de la diagonale du carré de côté l'unité puisqu'elle vaut $\sqrt{2}$, provoquant un schisme entre géométrie et nombres. Ce hiatus ne sera surmonté qu'en 1637 par René DESCARTES dans son supplément *Géométrie* au *Discours de la Méthode.*

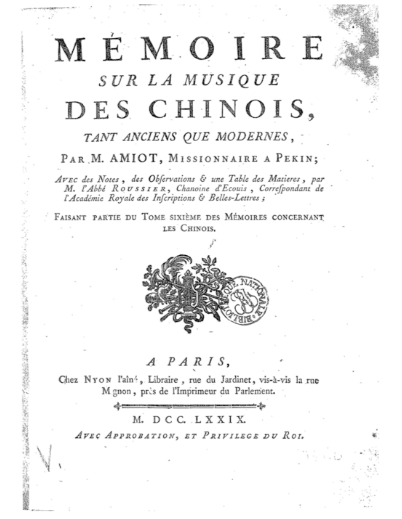
Pour les Pythagoriciens, la musique était une des branches des mathématiques s'appuyant sur des rapports simples de raccourcissement d'une corde fournissant les harmonies les plus riches : l'unisson avec la division par 2, les quintes avec le rapport 2/3 et les quartes 3/4.

Cela conduit à la construction d'une première gamme dite « diatonique », l'intervalle élémentaire, le ton, étant attaché à la division par 9/8, ce qui suggère de diviser l'octave en 12 intervalles encore plus élémentaires, les demi-tons. Cette gamme fait malheureusement appel à des fractions bien compliquées, d'où la tentation d'introduire une « gamme tempérée » avec des demi-tons égaux. Ceci veut dire utiliser un nombre qui, multiplié par lui-même 12 fois, donne 2.



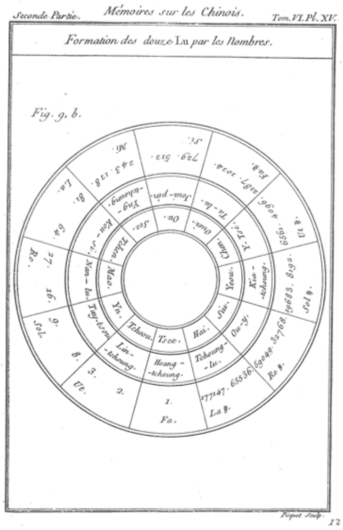
Horreur ! Ce nombre, $\sqrt[12]{2}$, est un nombre irrationnel, qui n\aurait pas pu avoir droit de cité dans la musique pythagoricienne.

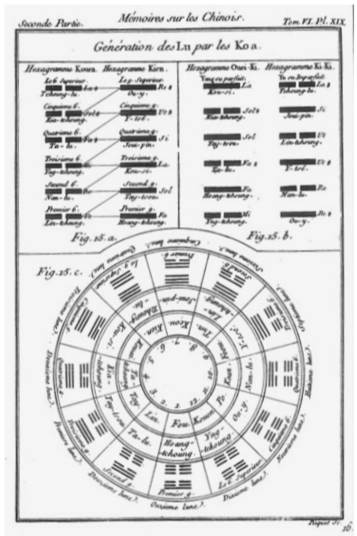
Pour continuer dans l'évocation de la diversité culturelle sur ce sujet de la musique et des gammes, je voudrais présenter quelques extraits d'une histoire de la musique chinoise produite en 1779 par un jésuite, Joseph AMIOT, après un long séjour en Chine. Les planches que l'on trouve dans ce texte remarquable, dans l'esprit de l'Encyclopédie, mettent en exergue des aspects mathématiques comme cette planche sur les nombres mais aussi culturels comme cette autre planche, qui met en correspondance les douze demi-tons avec les lunaisons, une correspondance qui, à ma connaissance, est totalement absente de la musique occidentale.



MÉMOIRE
SUR LA MUSIQUE
DES CHINOIS,
TANT ANCIENS QUE MODERNES,
PAR M. AMIOT, MISSIONNAIRE A PEKIN;
Avec des Notes, des Observations & une Table des Matieres, par M. l'Abbé ROUSSIER, Chanoine d'Ecouis, Correspondant de l'Académie Royale des Inscriptions & Belles-Lettres;
FAISANT PARTIE DU TOME SIXIÈME DES MÉMOIRES CONCERNANT LES CHINOIS.

A PARIS,
Chez NYON l'aîné, Libraire, rue du Jardinet, vis-à-vis la rue Mignon, près de l'Imprimeur du Parlement.
M. DCC. LXXIX.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.





Noter qu'elle mentionne aussi un raffinement de la gamme importante dans la musique chinoise, fondamentalement construite sur des gammes pentatoniques, avec 60 hauteurs de son différentes, d'une richesse sonore considérable.

Je ne voudrais pas quitter cette visite sommaire des liens entre mathématiques et musique sans citer Denis DIDEROT qui s'est beaucoup intéressé aux questions d'esthétique. Il dit ainsi : *"C'est par les nombres et non par les sens que le caractère sublime d'une musique doit être jugé"*.

Je voudrais aborder maintenant la **diversité des approches** possibles des mathématiques et pour cela je reviens à Alain CONNES.

Crédit photo : Jean-François DARS

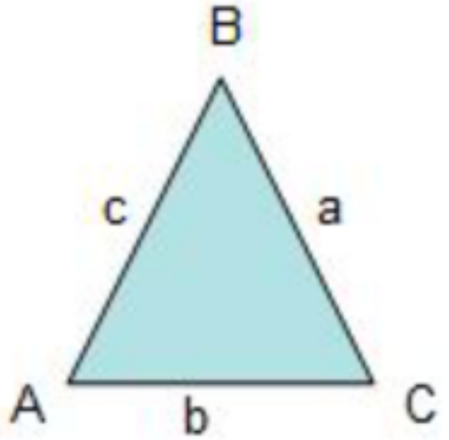
Dans le même texte du livre *Les Déchiffreurs* que j'ai déjà cité, il parle du rapport des mathématiques à la musique dans les termes suivants : *« exposer un enfant à la musique, vers l'âge de cinq ou six ans, permet d'équilibrer un petit peu la prépondérance dans son intellect du sens de la vue. Dans les mathématiques il y a cette dualité fondamentale entre d'un côté la géométrie, qui correspond aux aires visuelles du cerveau, et qui donne une intuition instantanée, immédiate. Et d'un autre côté, l'algèbre qui n'a rien de visuel, et s'inscrit dans le temps ! Et l'on peut percevoir cette puissance, l'élaboration de l'algèbre, à travers la musique. »*

Mais il cite aussi Évariste GALOIS et le rôle que celui-ci donne à la forme des calculs. Alain CONNES formule ainsi l'apport de GALOIS :

« Il faut être capable d'aller au-delà des calculs… et comprendre quelle sera leur nature, mais sans vraiment effectuer concrètement les calculs, comprendre de quelle forme sera le résultat, quelle symétrie aura le résultat. ».

Un superbe exemple de l'utilité d'une telle approche est donné par la formule donnant l'aire d'un triangle ABC dont on connaît les longueurs a, b et c des côtés, formule attribuée à HÉRON d'Alexandrie :

$$\mathrm{Surface}\,(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$



on sait que les triangles dégénérés, ceux dont les côtés se superposent, ont une aire nulle ; cela signifie que la formule de l'aire doit contenir trois facteurs correspondant aux trois façons pour un triangle de s'aplatir, b + c = a, c + a = b et a + b = c ; l'aire étant quadratique dans les longueurs, la formule peut être la racine carrée d'une expression quartique à condition de deviner un quatrième facteur ; par symétrie il ne peut être que a + b + c. La seule chose manquante est le coefficient devant la racine carrée, que l'on obtient par exemple en prenant le cas le plus symétrique, le triangle équilatéral.

Cela me permet de faire une autre citation d'Évariste GALOIS : *« faire du raisonnement une deuxième mémoire ».* Pour moi il est évident que, si on a compris comment la formule de l'aire d'un triangle est constituée, on ne peut pas l'oublier.

Diversité de sujets

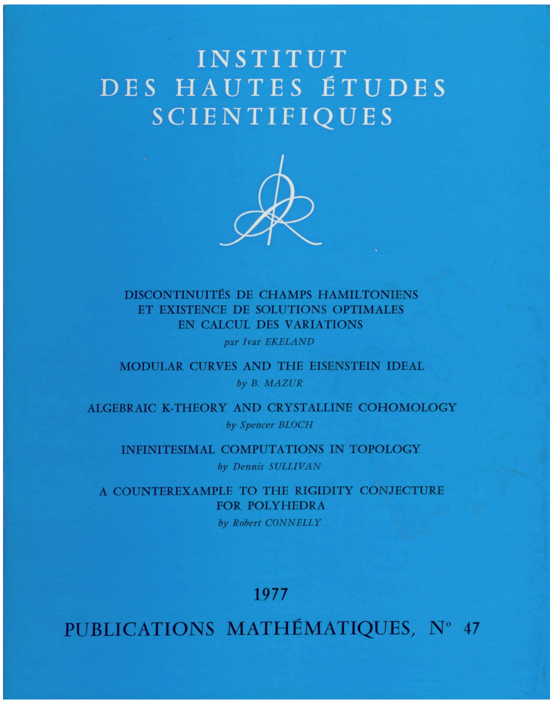
Les mathématiques offrent une diversité de sujets considérable, et cette profusion ne fait que croître avec leurs nouveaux développements. Cependant certains essaient de faire croire que seuls des sujets nobles mériteraient que l'on fasse des efforts pour les faire connaître.

Je m'inscris en faux contre une telle approche des mathématiques, et je voudrais donner deux exemples de sujets qui peuvent paraître anecdotiques… et qui sont pourtant intéressants pour entraîner la réflexion et aborder toutes sortes de mathématiques. Ils appartiennent à des domaines très différents des mathématiques : la géométrie et la combinatoire.

Le premier concerne la construction de polyèdres flexibles, des flexaèdres, un problème qui est resté non résolu pendant près de deux siècles.

En 1813, Augustin-Louis CAUCHY a montré que tout polyèdre convexe, c'est-à-dire un polyèdre tel que tout segment dont les extrémités sont sur la surface du polyèdre est tout entier à l'intérieur du polyèdre, est rigide. Ses faces supposées rigides ne peuvent pas être articulées entre elles permettant une flexion du polyèdre, d'où le nom de flexaèdre donné aux polyèdres qui peuvent ainsi se déformer sans que leur faces se déforment.

La question de l'existence de flexaèdre est resté longtemps ouverte, même si Raoul BRICART a publié en 1897 un article sur des octaèdres flexibles, dont les faces se recoupaient.



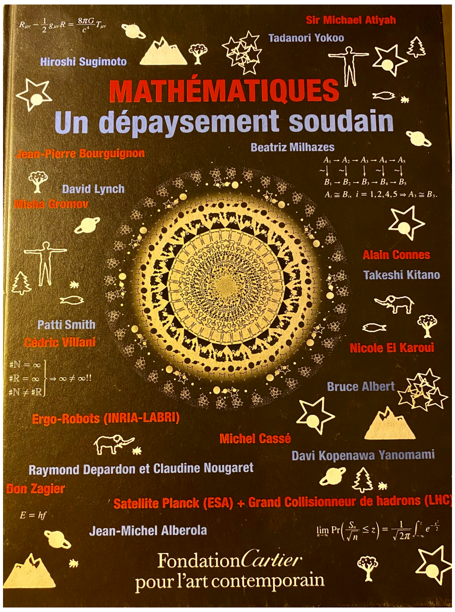
Il a fallu attendre 1977 pour que Robert CONELLY, après un séjour à l'IHÉS, en produise un polyèdre flexible, un flexaèdre, avec 18 sommets. L'article établissant ce résultat est paru dans le même volume que des articles qui traitent justement de ces fameux sujets nobles.

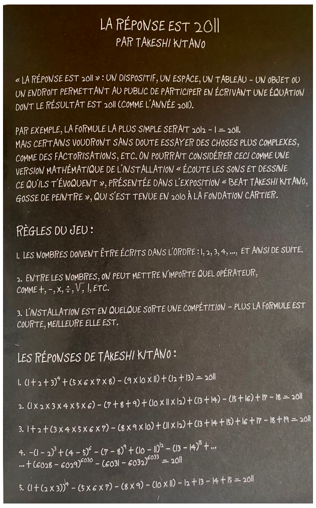
Des flexaèdres à 11 sommets ont été produits par Nicolaas KUIPER et Pierre DELIGNE, récipiendaire de la médaille Fields et du Prix Abel ! Une preuve qu'il n'y avait pas pour eux de « petits problèmes ». Le flexaèdre avec le moins de sommets connu à ce jour a 9 sommets. Il a été produit par Klaus STEFFEN… aussi après un séjour à l'IHÉS. Le problème est ouvert pour 8 sommets. Si le cœur vous en dit, soit en prouvant qu'il ne peut en exister, soit en en construisant un, vous laisserez votre nom à la postérité.

J'aime bien ce sujet car il est facilement présentable à des élèves de lycée, ce qui j'ai fait à de multiples occasions, et encore il y a une quinzaine de jours au Lycée français de Berlin.

L'autre exemple de question *a priori* anecdotique a une tout autre source. Dans le cadre de l'exposition *« Mathématiques, un dépaysement soudain »* à la Fondation Cartier pour l'art contemporain, différentes personnes, et notamment des artistes, ont fourni des contributions.

L'une d'entre elles est Takeshi KITANO, connu pour son œuvre cinématographique, ses peintures et ses sculptures, presque toujours marquées par un grand sens de la dérision et de la provocation. Pendant des années, il a animé une émission sur les mathématiques sur une chaîne de télévision privée au Japon.





LA RÉPONSE EST 2011
PAR TAKESHI KITANO

« LA RÉPONSE EST 2011 » : UN DISPOSITIF, UN ESPACE, UN TABLEAU – UN OBJET OU UN ENDROIT PERMETTANT AU PUBLIC DE PARTICIPER EN ÉCRIVANT UNE ÉQUATION DONT LE RÉSULTAT EST 2011 (COMME L'ANNÉE 2011).

PAR EXEMPLE, LA FORMULE LA PLUS SIMPLE SERAIT $2012 - 1 = 2011$.
MAIS CERTAINS VOUDRONT SANS DOUTE ESSAYER DES CHOSES PLUS COMPLEXES, COMME DES FACTORISATIONS, ETC. ON POURRAIT CONSIDÉRER CECI COMME UNE VERSION MATHÉMATIQUE DE L'INSTALLATION « ÉCOUTE LES SONS ET DESSINE CE QU'ILS T'ÉVOQUENT », PRÉSENTÉE DANS L'EXPOSITION « BEAT TAKESHI KITANO, GOSSE DE PEINTRE », QUI S'EST TENUE EN 2010 À LA FONDATION CARTIER.

RÈGLES DU JEU :

1. LES NOMBRES DOIVENT ÊTRE ÉCRITS DANS L'ORDRE : 1, 2, 3, 4, …, ET AINSI DE SUITE.

2. ENTRE LES NOMBRES, ON PEUT METTRE N'IMPORTE QUEL OPÉRATEUR, COMME $+, -, \times, \div, \sqrt{\ }, !$, ETC.

3. L'INSTALLATION EST EN QUELQUE SORTE UNE COMPÉTITION – PLUS LA FORMULE EST COURTE, MEILLEURE ELLE EST.

LES RÉPONSES DE TAKESHI KITANO :

1. $(1+2+3)^4+(5\times6\times7\times8)-(9\times10\times11)+(12+13)=2011$

2. $(1\times2\times3\times4\times5\times6)-(7+8+9)+(10\times11\times12)+(13+14)-(15+16)+17-18=2011$

3. $1+2+(3\times4\times5\times6\times7)-(8\times9\times10)+(11\times12)+(13+14+15)+16+17-18+19=2011$

4. $-(1-2)^3+(4-5)^6-(7-8)^9+(10-11)^{12}-(13-14)^{15}+\dots$
$\dots+(6028-6029)^{6030}-(6031-6032)^{6033}=2011$

5. $(1+(2\times3))^4-(5\times6\times7)-(8\times9)-(10\times11)-12+13-14+15=2011$

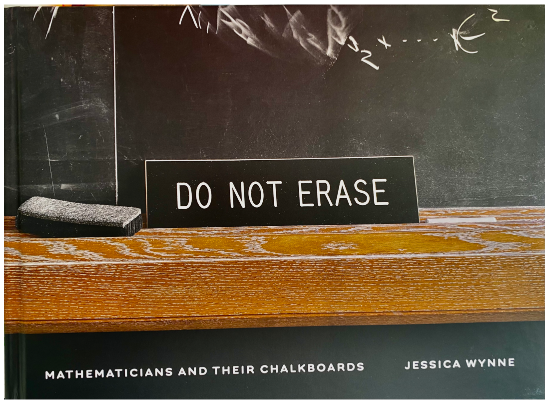
Pour l'exposition, il a proposé le problème ci-contre.

Celui-ci a engendré beaucoup de solutions et de variantes.

Ma déception a été de découvrir, très peu de temps après le début de l'exposition, que quelqu'un avait posté une solution optimale trouvée à l'aide d'un ordinateur sur les réseaux sociaux.

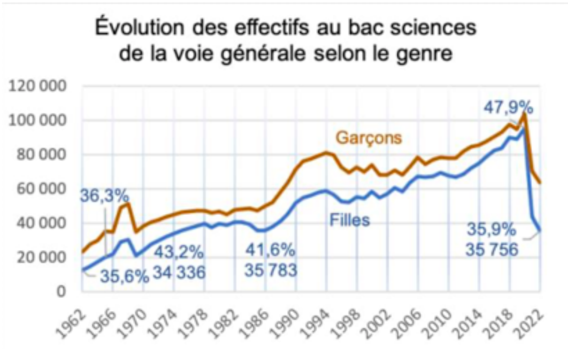
Heureusement cela n'a pas empêché de voir fleurir des solutions de toutes sortes, certaines très ingénieuses.

Je vais terminer cette exploration de la diversité des sujets par le témoignage d'une autre artiste, photographe elle, qui a produit le livre *"Do not erase"*. Jessica WYNNE a photographié une bonne centaine de tableaux de mathématiciens et de mathématiciennes, rassemblant ainsi une foison d'illustrations des différentes façons dont nous utilisons le tableau noir.



Elle a aussi demandé aux collègues sollicité.e.s de dire pourquoi le tableau noir était si important pour avancer dans leur travail.

Diversité des personnes faisant des mathématiques



Un des défis auquel Animath s'est attaqué au cours de son histoire est le manque de diversité des personnes faisant des mathématiques… et notamment celui de faire croître le nombre de femmes que les mathématiques attirent. J'imagine que, comme moi, que vous êtes sidérés par l'ampleur des dégâts faits de ce point de vue par la réforme du lycée qui a 5 ans maintenant.

Voir que, devant l'ampleur de la catastrophe nous ramenant 60 ans an arrière, le Ministère refuse toujours de rapporter une des réformes les plus rapidement destructrices qu'il ait jamais produit me consterne. Il se contente d'essayer de nous faire croire que le problème s'estompe et que des mesures cosmétiques vont accompagner un retour à la normale.

Sans abandon du cœur de la réforme, il n'y aura pas de retour à des pourcentages raisonnables et surtout pas de perspective de réparer les dommages qui sont déjà produits.

Dans quelles perspectives ?

Il ne me reste que peu de temps pour traiter ce qui nous attend avec les nouvelles perspectives qui s'offrent aux mathématiques en ces temps dominés par la course aux données et à leur exploitation et le développement de l'intelligence artificielle.

Bien entendu il y a d'abord les nouvelles possibilités de calcul qui, à la fois par leur ampleur et leur vaste accessibilité, changent ce qui peut être testé, modélisé. Cela ouvre évidemment de nouveaux horizons aussi pour la diversité des sujets dans lesquels les mathématiques peuvent être impliquées.

Les statistiques, trop longtemps méprisées par nombre de collègues, jouent maintenant un rôle central dans beaucoup de sciences et dans la vie sociale, et on leur demande beaucoup plus que l'on ne faisait dans un passé même encore récent. Un nouveau champ ouvert !

La structuration des données est devenue un problème majeur qui, pour être résolu, demande de développer à une tout autre échelle des outils comme les réseaux de neurone ou les cheminements aléatoires. Ceci renforce bien entendu l'intérêt à porter aux mathématiques stochastiques et aux systèmes dynamiques.

Tous ces domaines posent autant de défis pour pouvoir mieux les appréhender, pour rendre les outils qui s'y développent naturels. Y identifier de nouveaux « petits problèmes » fait partie du défi car la diversité des approches est encore plus valable pour ces territoires encore mal balisés.

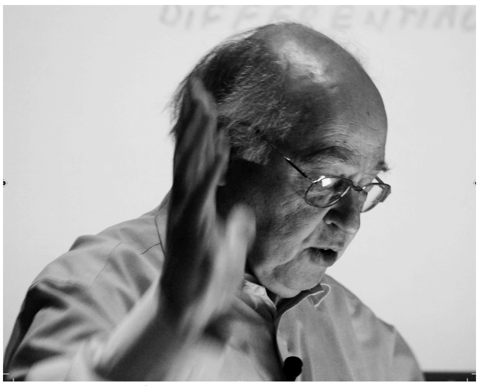
Certains pensent qu'il sera possible à des machines de développer des raisonnements mathématiques par elle-même. C'est ce qu'anticipent les équipes de DeepMind, le laboratoire d'intelligence artificielle de Google avec son logiciel AlphaGeometry qui a résolu presque tous les problèmes de géométrie des Olympiades internationales de mathématiques.

Sur ce sujet, je risque une conclusion inquiète : cela concerne le rôle qu'ont pris les images dans la vie de presque tout le monde (j'essaie de m'en préserver et d'en préserver mes petits-enfants). Dès que je prends un transport en commun, ce qui m'arrive souvent, je suis confronté à toutes ces personnes les yeux fixés sur une vidéo qui passe sur l'écran de leur téléphone.

Comme le suggérait Alain CONNES dans son essai, les images produisent un effet global. Leur support bidimensionnel ne présente pas l'ordre qu'a le discours, qui est linéaire. L'impact est presqu'inévitablement d'abord émotionnel avant d'être rationnel. J'y vois personnellement un grand danger avec presque sûrement une dégradation de l'importance qui est attachée au discours. Ce serait un très grand danger pour les mathématiques dont le développement s'appuie de façon essentielle sur une suite d'arguments rationnels qui s'enchaînent.

Conclusion

Pour conclure cette promenade, je voudrais vous offrir une approche plus poétique des mathématiques en donnant la parole à deux personnages pour qui j'ai une grande admiration. J'ai déjà mentionné le premier, il s'agit de Sir Michael ATIYAH.



Crédit photo : Jean-François DARS

Parmi les trésors que l'on trouve dans le livre *Les Déchiffeurs,* il y a en particulier ce texte de Sir Michael – qui est le texte d'ouverture du livre : « *Lorsqu'il fait grand jour, les mathématiciens vérifient leurs équations et leurs preuves, retournant chaque pierre dans leur quête de rigueur. Mais quand vient la nuit que baigne la pleine lune, ils rêvent, flottant parmi les étoiles et s'émerveillant au miracle des cieux. C'est là qu'ils sont inspirés. Il n'y a sans le rêve ni art, ni mathématiques, ni vie* »

L'autre personnage est peut-être une surprise puisqu'il s'agit de Victor HUGO. L'une[1] des deux préfaces de son grand œuvre *La Légende des Siècles* se présente ainsi (avec le titre et le sous-titre) :

LA VISION

D'où est sorti ce livre

Il n'est pas de brouillards, comme il n'est point d'algèbres,
Qui résistent, au fond des nombres ou des cieux,
A la fixité calme et profonde des yeux ;
Je regardais ce mur d'abord confus et vague,
Où la forme semblait flotter comme une vague,
Où tout semblait vapeur, vertige, illusion ;
Et, sous mon œil pensif, l'étrange vision
Devenait moins brumeuse et plus claire, à mesure
Que ma prunelle était moins troublée et plus sûre.

Je vous remercie pour votre attention.

[1] J'en ai fait l'exergue de mon cours de *Calcul Variationnel* à l'École polytechnique pour des raisons aisées à deviner.