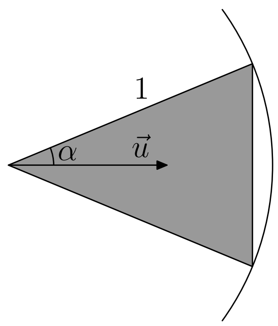
Corrigé de l'envoi 5 — 2006/2007

Problème 1 :
Il y a 30 vecteurs non nuls dans l'espace. Montrer qu'on peut en trouver deux tels que l'angle entre eux soit strictement inférieur à 45°.

Notre solution :

À chaque vecteur $\vec{u}$, associons un cône de base circulaire dont l'axe de révolution est porté par $\vec{u}$, dont la longueur d'une génératrice est 1 est dont l'angle entre l'axe et la génératrice est égal à $\alpha = 22,5°$. Le dessin en coupe suivant représente la situation :



Sur cette figure, le cône correspond au triangle grisé et la figure tridimentionnelle s'obtient en faisant pivoter le dessin autour de l'axe $\vec{u}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que tous les angles entre les vecteurs considérés excèdent 2α. Cela signifie que tous les intérieurs des cônes associés aux vecteurs sont disjoints. Le volume d'un tel cône est le tiers du produit de la surface du disque de base avec la longueur de la hauteur. Il vaut donc $\frac{\pi}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$. À eux trente, les cônes occupent donc un volume égal à :

$$10\pi\sin^2\alpha\cos\alpha \geqslant 4,25.$$

Mais c'est impossible car le volume de la boule de rayon 1 qui les contient tous n'est que de $\frac{3}{4}\pi \leqslant 4,19$.

Corrigé de l'envoi 5 — 2006/2007

Problème 2 :
Soit n villes entre lesquelles on peut voyager, moyennant un certain coût. Le voyage de la ville a à la ville b coûte c_{ab}. Le prix total d'un itinéraire passant par toutes les villes une et une seule fois est constant. Montrer qu'on peut trouver des nombres e_k et f_k tels que pour tous a et b, $c_{ab} = e_a + f_b$.

Notre solution :

On peut interpréter la question de la façon suivante : il s'agit de montrer que le coût du voyage reliant a à b correspond à la somme d'une taxe de sortie de la ville a (noté e_a) et d'une taxe d'entrée dans la ville b (noté f_b), le voyage étant pour lui-même gratuit[1].

Supposons $n \geqslant 5$. Fixons v l'une des villes. Nous montrons d'abord qu'il existe une constante c_{vv} (appelée *droit de passage* par v) telle que $c_{av}+c_{vb} = c_{ab}+c_{vv}$ pour toutes villes a et b formant avec v un ensemble de villes deux à deux distinctes. On remarque tout de suite que la notation est choisie de sorte que l'égalité reste vraie lorsque a ou b vaut v. Notons également que si la condition de l'énoncé est vérifiée, on doit avoir $c_{vv} = e_v + f_v$.

Pour prouver l'assertion précédente, notons $\delta_{ab} = c_{av} + c_{vb} - c_{ab}$. Considérons a' et b' deux nouvelles villes (c'est possible car on a supposé $n \geqslant 5$). L'hypothèse appliquée aux deux chemins $\cdots \to a \to v \to b \to b' \to \cdots$ et $\cdots \to a \to b \to v \to b' \to \cdots$ (où les pointillés décrivent dans un certain ordre — le même pour les deux chemins — l'ensemble des villes qui n'apparaissent pas) entraîne $\delta_{ab} = \delta_{bb'}$. De même $\delta_{a'b} = \delta_{bb'}$ d'où il reste $\delta_{ab} = \delta_{a'b}$. Pareillement, on montre $\delta_{ab} = \delta_{ab'}$ d'où il découle l'égalité de tous les δ_{ab} comme annoncé.

On revient à présent à la question de l'énonce. On remarque dans un premier temps que si x est un réel quelconque, la condition de l'énoncé ne change pas si on ajoute x à chacun des e_a et que l'on retranche le même x à chacun des f_b. Cela nous permet d'imposer, sans restreindre la généralité, la condition supplémentaire $e_v = 0$. Voulant satisfaire la condition de l'énoncé, on est conduit à poser $e_a = c_{av} - c_{vv}$ et $f_b = c_{vb}$ pour toutes villes a et b. Il ne reste plus qu'à faire la vérification. Pour cela, on calcule $e_a + f_b = c_{av} - c_{vv} + c_{vb} = c_{ab}$ comme voulu.

Finalement, il reste à traiter les petites valeurs de n. Pour $n = 1$ et $n = 2$, cela ne pose aucun problème. Pour $n = 3$, on reprend la preuve précédente : si les villes sont nommées v, a et b, il s'agit juste de montrer $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ et cela découle de l'égalité de prix entre les voyages $a \to b \to v \to a$ et $a \to v \to b \to a$. Pour $n = 4$ c'est un peu plus compliqué. Si les villes sont v, a, b et c, les mêmes arguments que précédemment impliquent $\delta_{ab} = \delta_{bc} = \delta_{ca}$ et $\delta_{ba} = \delta_{ac} = \delta_{cb}$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\delta_{ab} = \delta_{ba}$. Pour cela on considère les trois couples de chemins suivants :

$$\begin{array}{ccc} a \to c \to b \to v \to a & \text{et} & a \to c \to v \to b \to a \\ a \to b \to c \to v \to a & \text{et} & a \to v \to c \to b \to a \\ a \to b \to v \to c \to a & \text{et} & a \to v \to b \to c \to a \end{array}$$

et on écrit l'égalité de coût pour chacun d'eux. En sommant celles-ci (puis en divisant par 2), on obtient la relation voulue.

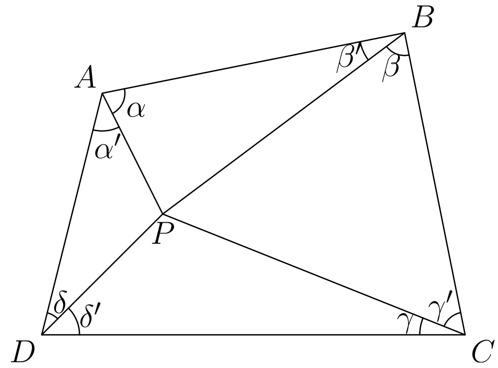
[1] Peu importe, mais on pourra rétorquer que cette façon de penser ne colle pas vraiment à la réalité. Il est cependant possible d'imaginer des situations plus pertinantes. Par exemple, on pourra penser que e_a est le prix d'achat d'une maison a (supposé constant au cours du temps) et $-f_a$ son prix de vente (également supposé constant). La somme $e_a + f_b$ correspond alors au prix d'un déménagement de a à b (en supposant les vrais frais de déménagement dérisoires). La quantité $c_{aa} = e_a + f_a$ est la somme d'argent payée en frais d'agence, frais de notaire, *etc.* lors de la transaction concernant la maison a.

Corrigé de l'envoi 5 — 2006/2007

Problème 3 :

Soit un quadrilatère convexe $ABCD$ et P un point à l'intérieur du quadrilatère. Montrer que l'un des angles $\widehat{PAB}$, $\widehat{PBC}$, $\widehat{PCD}$, $\widehat{PDA}$ est inférieur ou égal à 45°.

Notre solution :

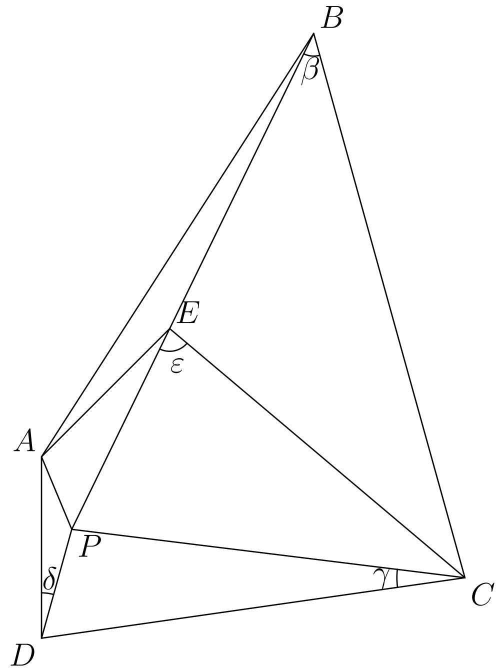


Désignons les angles par les lettres grecques comme indiqué sur la figure ci-contre. La loi des sinus appliquée dans les quatre petits triangles donne les égalités :

$$\frac{PA}{\sin\beta'} = \frac{PB}{\sin\alpha} \quad ; \quad \frac{PB}{\sin\gamma'} = \frac{PC}{\sin\beta}$$

$$\frac{PC}{\sin\delta'} = \frac{PD}{\sin\gamma} \quad ; \quad \frac{PD}{\sin\alpha'} = \frac{PA}{\sin\delta}.$$

En les multipliant, on obtient $p = \sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma\ \sin\delta = \sin\alpha'\ \sin\beta'\ \sin\gamma'\ \sin\delta'$. Les angles α, β, γ, δ, α', β', γ' et δ' sont tous compris entre 0 et π et ont pour somme 2π. L'inégalité de Jensen appliquée à la fonction $f = \ln\circ\sin$ concave[2] sur $]0,\pi[$ permet d'écrire $\ln(p^2) \leqslant 8f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ soit $p \leqslant \sin^4(\frac{\pi}{4})$. Ainsi l'un des facteurs de p est inférieur ou égal à $\sin(\frac{\pi}{4})$, ce qui assure que l'angle correspondant est soit inférieur à $\frac{\pi}{4}$, soit supérieur à $\frac{3\pi}{4}$. Il reste à examiner cette dernière possibilité.



Supposons donc qu'un des angles, disons α, soit supérieur ou égal à $\frac{3\pi}{4}$ et montrons que la conclusion de l'énoncé demeure. Raisonnons par l'absurde en supposant β, γ et δ supérieurs à $\frac{\pi}{4}$. Traçons la droite issue de A faisant un angle $\frac{3\pi}{4}$ avec (DA). Elle coupe la droite (PB) en un point E. Au vu de l'inégalité supposée sur α, on a $\frac{\pi}{2} < \widehat{PAE} < \frac{3\pi}{4}$, d'où on tire $E \in [PB]$, puis $\varepsilon \geqslant \beta > \frac{\pi}{4}$ (où $\varepsilon = \widehat{PEC}$).

Du fait que la somme des angles de $AECD$ fait 2π et qu'à eux deux les angles en A et D dépassent déjà π, on déduit que l'angle en E dans ce quadrilatère n'excède pas π. Ainsi $AECD$ est convexe, et d'après la première partie de la solution, l'un des angles γ, δ ou ε est supérieur à $\frac{3\pi}{4}$. Ainsi $\varepsilon + \gamma + \delta \geqslant \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, puis :

$$2\pi = \widehat{DAE} + \widehat{AEC} + \widehat{ECD} + \widehat{CDA} > \frac{3\pi}{4} + \varepsilon + \gamma + \delta \geqslant 2\pi$$

ce qui matérialise la contradiction recherchée.

[2] Sa dérivée seconde est $x \mapsto -\frac{1}{\sin^2 x}$ et est donc bien négative.

Corrigé de l'envoi 5 — 2006/2007

Problème 4 :

Les nombres de 1 à 1000 sont placés sur un cercle. Montrer qu'on peut les relier avec 500 cordes qui ne se coupent pas deux à deux d'une telle manière que la différence des deux nombres aux bouts de chaque corde n'excède pas 749.

Notre solution :

On colorie les nombres compris entre 251 et 750 en bleu et les autres en rouge. De cette façon, si une corde relie un nombre bleu à un nombre rouge, la deuxième condition de l'énoncé est satisfaite. Par ailleurs, on remarque qu'il y a exactement 500 nombres coloriés en rouge, et 500 en bleu. Ainsi, si l'on parvient à relier chaque point rouge à un point bleu par des cordes qui ne se croisent jamais, on aura résolu l'exercice.

Cette dernière requête est en fait facile à réaliser. On commence par relier deux nombres de couleur différente situés côte à côte : c'est évidemment possible car sinon tous les nombres auraient la même couleur. On efface ensuite mentalement ces deux nombres et la corde qui les relie et on continue ainsi la construction jusqu'à épuisement des nombres d'une certaine couleur. Comme il y a au départ autant de nombres de chaque couleur, il ne restera à la fin plus rien. Par ailleurs, il est évident sur la construction que les cordes obtenues ne se croisent pas.

Corrigé de l'envoi 5 — 2006/2007

Problème 5 :

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall n \geqslant 2,\ f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)?$$

Notre solution :

Soit f une telle fonction. Par hypothèse, pour tout $n > 1$, $f(n+1) - f(n) = f(f(n-1)) > 0$, donc f est strictement croissante à partir de $n = 2$, d'où $f(n) \geqslant n - 1$.

De plus, on a pour $n > 0$, $f(f(n)) = f(n+2) - f(n+1) < f(n+2)$. Mais comme f est strictement croissante (à partir de 2), ceci implique que si $f(n) \neq 1$, alors $f(n) < n + 2$. On a donc un encadrement $n - 1 \leqslant f(n) \leqslant n + 1$ valable pour tout $n > 1$.

Mais alors, $f(n+1) - f(n) = f(f(n-1)) \leqslant 3$. Comme $f(f(n-1)) \geqslant f(n-1) - 1$, ceci implique que $f(n-1) \leqslant 4$, ce qui est absurde pour $n = 7$.

Corrigé de l'envoi 5 — 2006/2007

Problème 6 :

Parmi les sommets d'un n-gone régulier, k sont peints en rouge. On dit que le coloriage est *presque régulier* si pour tout entier naturel $m \leqslant n$ la condition suivante est vérifiée : si M_1 est un ensemble de m sommets successifs et M_2 un autre ensemble de m sommets successifs, alors le nombre de sommets peints dans M_1 et dans M_2 diffère d'au plus 1. Montrer qu'un coloriage presque régulier existe pour tout n et pour tout $k \leqslant n$ et qu'il est unique à rotation du polygone près.

Notre solution :

Considérons un coloriage presque régulier d'un n-gone en k couleurs, et essayons d'analyser ses propriétés. On note pour cela $A_1, \dots, A_n$ les sommets du polygône rangés dans cet ordre et on suppose, quitte à changer le sommet de départ que A_1 est peint. Notons plus généralement $a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_k$ les indices des sommets peints. Posons également $a_{k+1} = n + 1$ et $d_j = a_{j+1} - a_j$ pour j variant entre 1 et k.

Montrons tout d'abord que si j et j' sont des indices, d_j et $d_{j'}$ diffèrent au plus de 1. Quitte à échanger j et j' on peut supposer $d_j \leqslant d_{j'}$. Supposons en outre par l'absurde que $d_j \leqslant d_{j'} - 2$. Cela signifie que parmi les $(d_{j'} - 1)$ sommets consécutifs $A_{a_{j'}+1}, A_{a_{j'}+2}, \dots, A_{a_{j'+1}-1}$ aucun n'est peint, alors que parmi les sommets $A_{a_j}, A_{a_j+1}, \dots, A_{a_j+d_{j'}-2}$ il y en a au moins deux qui sont peints, à savoir A_{a_j} et $A_{a_{j+1}}$. Ceci contredit l'hypothèse et démontre de fait la propriété de cet alinéa.

On a par ailleurs $d_1 + \dots + d_k = n$. Ainsi, si $n = qk + r$ est la division eucidienne de n par k, le fait que l'on vient de prouver entraîne que les d_j ne peuvent valoir que q ou $q + 1$. Vient la propriété tout à fait remarquable suivante : le k-gone dont le j-ième sommet B_j est peint si et seulement si $d_j = q + 1$ forme un coloriage presque régulier.

En effet, considérons deux ensembles de m sommets successifs (pris parmi les B_i). Si les indices sont considérés modulo k, ces ensembles sont de la forme $\{B_j, B_{j+1}, \dots, B_{j+m-1}\}$ et $\{B_{j'}, B_{j'+1}, \dots, B_{j'+m-1}\}$. Supposons qu'il y ait s points peints dans le premier ensemble, et $s' \leqslant s - 2$ dans le second. Alors l'ensemble de sommets consécutifs $\{A_{a_{j'}}, A_{a_{j'}+1}, \dots, A_{a_{j'+m}}\}$ (où les indices portant sur A sont considérés modulo n) contient exactement $m + 1$ sommets rouges et a pour cardinal :

$$d_{j'} + d_{j'+1} + \dots + d_{j'+m-1} + 1 = mq + s' + 1.$$

L'ensemble de sommets consécutifs de même cardinal commençant à A_{a_j+1} se termine au sommet $A_{a_j+mq+s'+1}$, soit strictement avant $A_{a_j+mq+s} = A_{a_{j+m-1}}$. Ainsi il contient au plus $m - 1$ points coloriés. Ceci entre en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé et prouve par là-même que le coloriage des B_j est presque régulier.

Un autre point crucial à souligner est que la propriété précédente admet une réciproque. Soit un coloriage en k couleurs des A_i. On définit a_i et d_j comme précédemment et on suppose que les d_j ne prennent que les valeurs q et $q + 1$. On associe à cette situation, encore comme précédemment, un coloriage d'un k-gone de sommets B_j : le sommet B_j est colorié si et seulement si $d_j = q + 1$. On suppose cette fois-ci que le coloriage des B_j est presque régulier. Alors il en est de même de celui des A_i.

En effet, considérons $\{A_i, A_{i+1}, \dots, A_{i+m-1}\}$ un ensemble de m sommets consécutifs et notons s le nombre de ces sommets qui sont peints. Si ces sommets peints ont pour indice $a_j, \dots,$

a_{j+s-1}, on a un encadrement de la forme :

$$d_j + d_{j+1} + \cdots + d_{j+s-2} + 1 \leqslant m \leqslant d_{j-1} + d_j + \cdots + d_{j+s-1} - 1.$$

Considérons à présent un second ensemble de m sommets et notons i', j' et s' les entiers définis de façon similaire. Il s'ensuit évidemment un encadrement analogue. Raisonnons à nouveau par l'absurde en supposant $s' \leqslant s - 2$. Les inégalités précédentes entraînent :

$$d_j + d_{j+1} + \cdots + d_{j+s-2} + 1 \leqslant d_{j'-1} + d_{j'} + \cdots + d_{j'+s'-1} - 1$$

et donc *a fortioti* :

$$d_j + d_{j+1} + \cdots + d_{j+s'} + 1 \leqslant d_{j'-1} + d_{j'} + \cdots + d_{j'+s'-1} - 1.$$

Mais l'hypothèse sur la presque régularité du coloriage nous dit que les quantités $d_j + d_{j+1} + \cdots + d_{j+s'}$ et $d_{j'-1} + d_{j'} + \cdots + d_{j'+s'-1}$ diffèrent d'au plus 1, d'où il survient une contradiction qui démontre notre assertion.

À ce niveau, l'exercice résulte d'une récurrence facile sur n, l'hypothèse de récurrence étant : pour tout $k \leqslant n$, il existe un et un unique coloriage presque régulier en k couleurs d'un n-gone.