Corrigé de l'envoi 4 — 2006/2007

Problème 1 :

Trouver tous les polynômes P de degré impair tels que pour tout réel x,

$$P(x^2) = P(x)P(x-1).$$

Notre solution :

Le polynôme nul convient clairement. Montrons que c'est le seul. Si ce n'est pas le cas, comme P est de degré impair, il admet un nombre fini non nul de racines. Soit r la plus grande. On a, en posant $x = r + 1$:

$$P((r+1)^2) = P(r+1)P(r) = 0,$$

avec $(r+1)^2 = (r + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + r > r$. Cela contredit la maximalité de r.

Corrigé de l'envoi 4 — 2006/2007

Problème 2 :
Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n,

$$f\big(|f(n)-n|\big)+n \leqslant |f(n)-n|+1.$$

Montrer que l'équation $f(m)=0$ admet une infinité de solutions.

Notre solution :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g(n)=|f(n)-n|$. La condition de l'énoncé se réécrit :

$$f(g(n))+n \leqslant g(n)+1. \tag{1}$$

D'où pour tout $n \geqslant 1$, $f(g(n)) \leqslant g(n)$. On a donc $g(g(n)) = g(n) - f(g(n))$, puis en appliquant (1) avec $g(n)$, il vient $f(g(n)-f(g(n)))+g(n) \leqslant g(n)-f(g(n))+1$. Ainsi $f(g(n)-f(g(n)))+f(g(n)) \leqslant 1$, d'où $f(g(n))=0$ ou $f(g(n))=1$. Si $f(g(n))=1$, $f(g(n)-f(g(n)))+f(g(n)) \leqslant 1$ devient $f(g(n)-1) \leqslant 0$, *i.e.* $f(g(n)-1)=0$. On a donc en définitive $f(g(n))=0$ ou $f(g(n)-1)=0$.

Si on montre que g prend une infinité de valeurs, on a gagné. Raisonnons par l'absurde en supposant le contraire. Soit $g_{\max}$ sa valeur maximale. En prenant $n = g_{\max}+2$, il vient :

$$n \leqslant f(g(n))+n \leqslant g(n)+1 \leqslant g_{\max}+1 = n-1,$$

d'où la contradiction.

Corrigé de l'envoi 4 — 2006/2007

Problème 3 :

Soient $(a_1, \cdots, a_n)$ et $(x_1, \cdots, x_n)$ des réels strictement positifs tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Montrer que

$$2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i x_j) \leqslant \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i x_i^2}{1-a_i} \right).$$

Notre solution :

En ajoutant $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ à chacun des membres de l'inégalité, on se ramène à montrer :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \leqslant \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{a_i}{1-a_i} \right) x_i^2 \right),$$

soit :

$$1 - \frac{n-2}{n-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{1-a_i} \right).$$

Comme :

$$1 - \frac{n-2}{n-1} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (1-a_i)},$$

l'inégalité à montrer équivaut à

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{1-a_i} \right) \sum_{i=1}^{n} (1-a_i),$$

conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corrigé de l'envoi 4 — 2006/2007

Problème 4 :

Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $x^2 + y^3 \geqslant x^3 + y^4$.

Montrer que $x^3 + y^3 \leqslant 2$.

Notre solution :

On a :

$$x^3 + y^3 = x^3 + y^4 - y^4 + y^3 \leqslant x^2 + y^3 - y^4 + y^3 = x^2 + y^2 - (y - y^2)^2 \leqslant x^2 + y^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, $(x^2 + y^2)^2 \leqslant (x + y)(x^3 + y^3) \leqslant (x + y)(x^2 + y^2)$ puis $x^2 + y^2 \leqslant x + y$. On a alors $(x + y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2) \leqslant 2(x + y)$ soit $x + y \leqslant 2$. En mettant bout à bout les inégalités obtenues, il vient $x^3 + y^3 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant x + y \leqslant 2$.

Corrigé de l'envoi 4 — 2006/2007

Problème 5 :

Soit P un polynôme de degré impair à coefficients entiers (relatifs). Soient u_0 et u_1 deux entiers relatifs. Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par :

$$u_{n+2} = P(u_{n+1}) - P(P(u_n)).$$

Montrer que cette suite ne parcourt pas $\mathbb{Z}$, i.e. qu'il existe un entier relatif ne se trouvant pas dans les termes de la suite.

Notre solution :

Supposons dans un premier temps P de degré 1. Alors $P(X) = aX + b$, et on a, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = au_{n+1} + b - a(au_n + b) - b = au_{n+1} - a^2u_n - ab$. La suite ne prend donc que des valeur divisibles par a à partir d'un certain rang, donc pour qu'elle parcourre $\mathbb{Z}$, il faut que $a = 1$ ou $a = -1$. Si $a = 1$, alors $u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} - b = -u_n - 2b$, d'où $u_{n+6} = -u_{n+3} - 2b = u_n$. La suite est alors périodique, et ne parcourt pas $\mathbb{Z}$. Si $a = -1$, on a de même $u_{n+3} = u_n - 2b$ d'où $u_n \leqslant \max(u_0, u_1, u_2)$ (resp. $u_n \geqslant \min(u_0, u_1, u_2)$) si $b \geqslant 0$ (resp. $b \leqslant 0$). La suite ne parcourt pas $\mathbb{Z}$.

Supposons maintenant P de degré strictement supérieur à 1. Pour simplifier, nous allons supposer que le coefficient dominant de P est strictement positif (le cas strictement négatif se traite de manière analogue). Le polynôme dérivé P' tend alors vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Ainsi, il existe des entiers $\alpha < \beta$ tels que P soit strictement croissant sur les intervalles $]-\infty, \alpha]$ et $[\beta, +\infty[$. Quitte à éloigner α et β, on peut en outre supposer que $P(x) \in [P(\alpha), P(\beta)]$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$. Soit $A = \beta - \alpha + 1$. Montrons que si x et y sont des entiers tels que $|y - x| \geqslant A$, on a nécessairement $P(x) \neq P(y)$. Quitte à échanger x et y, on peut supposer $y - x \geqslant A$. On distingue les cas suivants qui sont les seuls qui peuvent se produirent :

- ☞ $x \leqslant \alpha$ et $y \leqslant \alpha$: dans ce cas, on conclut en notant que P est strictement croissant sur $]-\infty, \alpha]$
- ☞ $x < \alpha$ et $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$: dans ce cas, $P(x) < P(\alpha)$ et $P(y) \geqslant P(\alpha)$
- ☞ $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ et $y > \beta$: dans ce cas, $P(x) \leqslant P(\beta)$ et $P(y) > P(\beta)$
- ☞ $x \geqslant \beta$ et $y \geqslant \beta$: dans ce cas, on utilise la stricte croissance de P sur $[\beta, +\infty[$.

D'autre part, la limite de $|P(P(x))| - |x|$ pour $x \to \pm\infty$ est $+\infty$. Ainsi, il existe un entier B tel que pour tout x vérifiant $|x| \geqslant A$, on ait $|P(P(x))| \geqslant |x| + 4$. Choisissons à présent M un entier à la fois supérieur à A et B.

Pour tout n, l'entier $u_{n+3} = P(u_{n+2}) - P(P(u_{n+1}))$ est divisible par $P(u_{n+1}) - u_{n+2} = P(P(u_n))$ (puisque si P est un polynôme à coefficients entiers, $a-b$ divise toujours $P(a)-P(b)$). Si on suppose en outre $|u_n| \geqslant M$, il vient $|P(P(u_n))| \geqslant |u_n|+4 \geqslant A$. Ainsi u_{n+3} ne peut s'annuler et on a forcément :

$$|u_{n+3}| \geqslant |P(P(u_n))| \geqslant |u_n| + 4 \geqslant M + 4.$$

Ceci nous dit qu'une suite extraite de la forme $(|u_{3n+k}|)$ (pour $k \in \{0, 1, 2\}$) prend au plus une valeur dans l'intervalle $[M, M + 4[$: en effet, si elle prend à un moment une valeur supérieure à M, toutes les suivantes sont supérieures à $M + 4$. À elles trois, ces suites ne prennent donc pas l'une des quatre valeurs M, $M + 1$, $M + 2$ ou $M + 3$. Ceci entraîne directement que la suite (u_n) n'exhauste pas $\mathbb{Z}$, comme voulu.

Corrigé de l'envoi 4 — 2006/2007

Problème 6 :

Trouver toutes les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x-y) = f(x) - f(y) - g(x)g(y),$$

et f croissante.

Notre solution :

En prenant $y = x$ dans la condition de l'énoncé, on obtient $f(0) = -g(x)^2$. Si $f(0) = 0$, cette égalité implique que g est la fonction nulle, et l'équation fonctionnelle devient alors simplement $f(x-y) = f(x) - f(y)$. On reconnaît l'équation de Cauchy dont les solutions croissantes sont les $x \mapsto ax$ avec $a \geqslant 0$.

Supposons désormais $f(0) \neq 0$. L'équation $f(0) = -g(x)^2$ implique alors $g(x) < 0$ pour tout réel x. Par ailleurs, en posant $y = 0$ dans l'équation de l'énoncé, on obtient :

$$0 = -f(0) - g(x)g(0) = g(x)\left(g(x) - g(0)\right) = 0$$

et donc $g(x) = g(0)$ pour tout x. Autrement dit, g est une fonction constante. L'équation fonctionnelle se réécrit alors $f(x-y) = f(x) - f(y) + f(0)$ et a pour solutions croissantes les fonctions de la forme $x \mapsto ax + f(0)$ avec $a \geqslant 0$.

En conclusion, dans tous les cas, g est constante égale à $b \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto ax - b^2$ avec $a \geqslant 0$. On vérifie que ces fonctions sont bien solutions.