Corrigé de l'envoi 2 — 2006/2007

Problème 1 :

Soit un tableau carré de $n \times n$ cases. On suppose que chaque ligne et chaque colonne contient exactement un 1 et un -1, le reste étant rempli de zéros. Montrer qu'on peut permuter les lignes et les colonnes de façon à obtenir le tableau analogue où on a échangé les 1 et les -1.

Notre solution :

On relie les lignes entre elles par des flèches : dans chaque colonne, la flèche part du -1 pour aller au 1.

Les lignes sont ainsi reliées entre elles, et chaque ligne a une flèche entrante (là où il y a un 1) et une sortante (là où il y a un -1). Elles forment ainsi des cycles : on part d'une ligne, et on suit les flèches dans le bon sens.

En numérotant les lignes autrement, on peut changer le sens de tous les cycles : par exemple, s'il y avait un cycle $1 \to 3 \to 7 \to 2 \to 1$, on met les lignes $1, 3, 7, 2$ aux emplacements $1, 2, 7, 3$. Après cette permutation de lignes, on obtient un tableau analogue à celui de départ, sauf qu'au lieu d'avoir un lien de la ligne a à la ligne b, on en a un de la ligne b à la ligne a, qui n'est pas forcément dans la bonne colonne. Une permutation des colonnes permet de les ramener aux bons endroits.

Corrigé de l'envoi 2 — 2006/2007

Problème 2 :

Soient $P_1, \ldots, P_n$ des points. On les relie par k arêtes de sorte que dans tout ensemble de quatre points distincts, trois d'entre eux soient reliés pour former un triangle. Quelle est la valeur minimale de k et comment l'obtenir ?

Notre solution :

On voit facilement une solution évidente : tous les points sont reliés entre eux sauf un qui est isolé. Cela nécessite $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ arêtes.

Supposons qu'il y ait strictement moins de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ arêtes. Il existe deux points u et v qui ne sont pas reliés. Alors si x et y sont deux points disjoints de u et v, x et y sont reliés, sinon on ne peut pas faire de triangle entre u, v, x, y. Donc les $n-2$ points restants sont tous reliés entre eux, ce qui fait $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ arêtes.

Il y a donc strictement moins de $n-2$ arêtes impliquant u ou v. Chacun des $n-2$ autres points peut former zéro, une ou deux arêtes avec u et v. Par le principe des tiroirs, il existe un point z qui n'est relié ni à u, ni à v. Et par conséquent parmi u, v, z et un autre point, on ne peut pas former de triangle.

Corrigé de l'envoi 2 — 2006/2007

Problème 3 :
Soit X un ensemble de $n+2$ entiers (deux à deux distincts) parmi $-n, 1-n, \ldots, n-1, n$. Montrer qu'il existe des entiers a, b et c distincts dans X tels que $a+b=c$.

Notre solution :

On démontre l'affirmation par récurrence. Pour $n=1$, c'est trivial : $1+(-1)=0$. Supposons cela vrai jusqu'à un rang n.

Premier cas : les $n+2$ entiers ne comprennent pas n et $-n$. Alors il y en a $(n-1)+2$ parmi $\{1-n, 2-n, \ldots, n-2, n-1\}$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on peut trouver a, b, c distincts tels que $a+b=c$.

Second cas : parmi les $n+2$ entiers se trouvent n et $-n$. Si 0 y est aussi, c'est fini. Sinon, il reste n entiers de valeur absolue entre 1 et $n-1$. Cela fait $n-1$ paires d'entiers espacés de n : il y a forcément une paire $(a, a+n)$ prise, et $(a+n)+(-n)=a$.

Corrigé de l'envoi 2 — 2006/2007

Problème 4 :

Trouver tous les ensembles finis A de réels positifs ou nuls, comprenant au moins quatre éléments, et tels que pour tous a, b, c, d distincts dans A, $ab+cd$ soit aussi dans A.

Notre solution :

Supposons que zéro ne soit pas dans A.

Soient $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ les quatre plus grands éléments. On pose $a = a_1a_2 + a_3a_4$, $b = a_1a_3 + a_2a_4$ et $c = a_1a_4 + a_2a_3$. Alors $a > b > c$ (c'est l'inégalité de réordonnement). Par ailleurs, on sait que a, b et c font aussi partie de A.

Si on avait $c > a_4$, c'est-à-dire $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$, il viendrait $1 = a_2 + \frac{a_3a_4}{a_1} = a_2 + \frac{a_1a_4}{a_3}$ d'où $a_1 = a_3$ ou $a_4 = 0$, ce qui est absurde.

Si on avait $c = a_4$, c'est-à-dire $(1-a_1)a_4 = a_2a_3$ et $1 = a_1 + \frac{a_2a_3}{a_4}$, il viendrait $1 - a_1 > a_2$, donc $a_2 < \frac{1}{2}$. Alors $a < \frac{a_1+a_3}{2} < a_1$. Donc $a = a_2$, d'où :

$$1 = a_1 + \frac{a_3a_4}{a_2} = a_1 + \frac{a_2a_3}{a_4}$$

puis $a_2 = a_4$ ce qui est absurde.

Donc $c < a_4$. On a donc un cinquième terme. En recommençant avec a_2, a_3, a_4, a_5 on en déduit un terme encore plus petit, *etc.* Ce qui contredit la finitude de A. Donc zéro est dans A.

Si deux éléments de A sont inférieurs à 1, on peut commencer par remarquer qu'il ne peut pas contenir 0 (sinon, on prendrait a celui de plus petite valeur absolue, $c = 0$ et $b < 1$, et d quelconque : $|ab+cd| < |a|$ est absurde).

On en déduit qu'il y a au plus dans A un élément de $]0,1[$, et par conséquent $a_1 > 1$. Ainsi $c = a_4a_1 + a_2a_3 > a_4$ et $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$. De $aa_3 = ca_1$, on déduit $a_4 = 0$ car $a_1 > a_3$. En reportant dans a, b, c, il vient $a_1a_2 = a_1$, $a_1a_3 = a_2$ et $a_2a_3 = a_3$, d'où $a_2 = 1$ et $a_1 = \frac{1}{a_3}$.

Réciproquement, si $A = \{x, 1, \frac{1}{x}, 0\}$, A convient. Les ensembles solutions sont tous ceux de cette forme.

Corrigé de l'envoi 2 — 2006/2007

Problème 5 :

Dans un quadrillage de 102×102 cases, on considère une figure F connexe[1] constituée de 101 cases. On étudie le nombre n maximal de répliques de F qu'on peut découper dans le quadrillage. Quelle est la plus petite valeur de n possible ?

Notre solution :

La réponse est 4.

Soit F une croix composée d'une case et de quatre branches de 25 cases chacune. Si on place une telle croix dans le quadrillage, son centre est quelque part dans un carré de 52×52 cases autour du centre (sinon ça déborde). Si on pouvait mettre cinq croix, deux des centres seraient dans un quart du carré central, de taille 26×26, ce qui est impossible, puisque leur branches se croiseraient.

Supposons maintenant F quelconque. On voit facilement que F est inscrite dans un rectangle de taille $a \times b$ avec $a + b = 102$ (on peut démontrer cela par récurrence : une case est dans un rectangle 1×1, et chaque ajout d'une case fait au pire croître l'une des dimensions de 1). Mais on peut mettre quatre tels rectangles sur le quadrillage : on en place un dans un coin, et on le tourne un quart de tour autour du centre pour en obtenir quatre autres.

On peut donc toujours avoir au moins quatre répliques, et ce nombre est bien maximal d'après l'exemple de la croix.

[1] C'est-à-dire en un seul morceau : on peut relier deux points quelconques de la figure par un chemin restant dans la figure.

Corrigé de l'envoi 2 — 2006/2007

Problème 6 :

Les entiers relatifs sont coloriés à l'aide de quatre couleurs. On choisit des nombres impairs de valeurs absolues différentes, x et y. Montrer qu'il existe des entiers de même couleur dont la différence est x, y, $x+y$ ou $x-y$.

Notre solution :

On considère un quadrillage infini que l'on colorie de la façon suivante : le point de coordonnées (i, j) est peint avec la couleur de l'entier $ix + jy$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas d'entiers de même couleur de différence x, y, $x+y$ ou $x-y$. Ceci signifie qu'aucun point du quadrillage n'est de même couleur que ses voisins (horizontalement, verticalement et diagonalement).

Supposons que sur une ligne on ait trois couleurs différentes consécutives $(\cdots 1\ 2\ 3 \cdots)$. Alors un petit raisonnement montre qu'on a au-dessus : $(\cdots 3\ 4\ 1 \cdots)$ puis encore au-dessus $(\cdots 1\ 2\ 3 \cdots)$ et ainsi de suite. On obtient ainsi trois colonnes où les couleurs se répètent avec une période de 2.

Sinon, on n'a jamais trois couleurs différentes à la suite sur une ligne, ce qui veut exactement dire qu'elle est périodique, de période 2.

Quitte à retourner le quadrillage, on peut donc supposer qu'on a une ligne coloriée avec une alternance $(\cdots 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1 \cdots)$. La ligne du dessus est donc coloriée par $(\cdots 3\ 4\ 3\ 4\ 3\ 4\ 3 \cdots)$ (à un décalage près), et ainsi de suite. Toutes les lignes sont donc coloriées périodiquement avec une période de 2.

Rappelons-nous maintenant qu'on n'a pas colorié un *tableau*, mais des *nombres*. Ainsi, la case $(x, 0)$ et la case $(0, y)$ sont de même couleur, puisqu'elles correspondent toutes deux au nombre xy. Cependant le raisonnement précédent montre que la ligne 0 est coloriée avec seulement deux couleurs, et que les lignes impaires, comme la ligne y, sont coloriées avec deux autres couleurs. Les cases $(x, 0)$ et $(0, y)$ ne peuvent donc pas être de meme couleur.