

1. Dans le plan, on donne deux points A et H , et un cercle Γ passant par A . Comment trouver B et C sur Γ tels que H soit l'orthocentre de ABC ?

Solution.

Rappelons d'abord un résultat classique : les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.

Premier cas. $A = H$.

Dans ce cas, l'exercice revient à trouver B et C , points de Γ , pour lesquels ABC est un triangle rectangle en A : il en est ainsi si et seulement si B et C sont deux points de Γ (distincts de A) diamétralement opposés.

Second cas. $A \neq H$.

Soit D le point tel que l'intersection de Γ et de (AH) soit égale à $\{A, D\}$, et soit Δ la droite passant par le milieu de $[HD]$ et orthogonale à (AH) (si $H \neq D$, Δ est la médiatrice de $[HD]$).

D'après le rappel, pour que deux points B et C conviennent, il faut et il suffit que la droite (BC) coïncide avec Δ .

Cela permet de conclure : si Δ coupe Γ en deux points distincts B et C , alors ABC admet H pour orthocentre ; sinon, le problème n'a pas de solution.

Remarque. Une variante de cette solution consiste, lorsque $A \neq H$, à considérer le cercle Γ' image de Γ par la translation de vecteur \overrightarrow{AH} . Si B et C conviennent, ils sont dans $\Gamma \cap \Gamma'$, et réciproquement.

2. Soit ABC un triangle. On considère trois points A' , B' , C' tels que les triangles BCA' , CAB' , ABC' soient isocèles en A' , B' , C' , deux à deux semblables, et extérieurs à ABC .
Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

Solution. Soient α , β , γ les angles du triangle ABC . On pose

$$\theta = \widehat{CBA'} = \widehat{BCA'} = \widehat{CAB'} = \widehat{ACB'} = \widehat{ABC'} = \widehat{BAC'}.$$

Notons P , Q , R les points d'intersection des droites (AA') , (BB') , (CC') avec (BC) , (CA) , (AB) respectivement.

• Supposons pour commencer que P , Q , R appartiennent respectivement à $]BC[$, $]CA[$, $]AB[$.

En vue d'appliquer le théorème de Ceva, nous allons calculer $\frac{PB}{PC} \frac{QC}{QA} \frac{RA}{RB}$.

Avec la relation des sinus dans les triangles ABP et ACP , on obtient

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PB}{PA} \frac{PA}{PC} = \frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \beta} \frac{\sin \gamma}{\sin \widehat{CAP}}$$

Avec la relation des sinus dans les triangles ABA' et ACA' , on obtient

$$1 = \frac{A'B}{A'C} = \frac{A'B}{AA'} \frac{AA'}{A'C} = \frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin(\beta + \theta)} \frac{\sin(\gamma + \theta)}{\sin \widehat{CAP}}.$$

donc

$$\frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{CAP}} = \frac{\sin(\beta + \theta)}{\sin(\gamma + \theta)}.$$

Finalement

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{CAP}} \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin(\beta + \theta)}{\sin(\gamma + \theta)} \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}.$$

On obtient des expressions analogues pour $\frac{QC}{QA}$ et $\frac{RA}{RB}$, et on vérifie que

$$\frac{PB}{PC} \frac{QC}{QA} \frac{RA}{RB} = 1.$$

Le théorème de Ceva permet alors de conclure que (AP) , (BQ) , (CR) sont concourantes, ce qui signifie que (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes.

• Si P , Q , R sont extérieurs aux côtés, un calcul analogue aboutit ; on peut aussi appliquer le théorème de Ceva sous forme algébrique.

• Enfin si l'un des trois points P , Q , R est confondu avec un des sommets A , B , C , le résultat est immédiat.

3. Soient Γ et Γ' deux cercles tangents en O . À tout point M , distinct de O , de Γ , on associe le point M' de Γ' tel que OM et OM' soient orthogonaux, et on note H le projeté orthogonal de O sur MM' . Déterminer l'ensemble des points H quand M varie.

Solution.

• *Premier cas.* Les cercles sont tangents extérieurement et leurs rayons sont différents.

Soit S le centre de l'homothétie h de rapport R'/R qui transforme Γ en Γ' : S est aussi le point d'intersection des tangentes Δ et Δ' communes à Γ et Γ' et ne passant pas par O .

Soit M un point de Γ distinct de O , et soit M' dans Γ' tel que OM et OM' soient orthogonaux. Soit A le point de Γ diamétralement opposé à O et soit B le point de Γ' diamétralement opposé à O .

Les triangles AMO et $OM'B$ sont rectangles car $[AO]$ et $[OB]$ sont des diamètres de Γ et Γ' respectivement.

Comme $\widehat{MOM'}$ est un angle droit, on constate que (AM) est parallèle à (OM') et (MO) est parallèle à $(M'B)$. On en déduit que l'homothétie h envoie le triangle AMO sur le triangle $OM'B$.

Par conséquent, S, M, M' sont alignés.

Le point H est donc le projeté orthogonal de O sur SM ; autrement dit, SHO est un triangle rectangle en H et donc H appartient au cercle de diamètre $[SO]$.

De plus, H n'est pas un point quelconque de cercle : il est nécessaire que H appartienne à l'arc de cercle limité par ses points d'intersection avec les tangentes Δ et Δ' .

Réciproquement, si H un point de cet arc de cercle, alors la droite SH coupe Γ en deux points (distincts ou confondus) M et P : alors H est le projeté de O sur MM' (ou sur PP').

• *Deuxième cas.* Les cercles sont tangents extérieurement et leurs rayons sont égaux.

Soit t la translation qui transforme Γ en Γ' . En raisonnant comme ci-dessus, on constate que t transforme AMO en $OM'B$.

Il s'ensuit que (MM') est parallèle à l'axe des centres, et on en déduit que H appartient à la tangente commune à Γ et Γ' passant par O .

Raisonnant comme dans le premier cas, on conclut que le lieu demandé est le segment inclus dans la tangente commune passant par O et limité par ses points d'intersection avec Δ et Δ' .

• *Troisième cas.* Les cercles sont tangents intérieurement.

La méthode du premier cas s'adapte : on considère le centre S de l'homothétie de rapport $-R'/R$ qui transforme Γ en Γ' (on ne peut plus obtenir S comme point d'intersection de tangentes communes à Γ et Γ' mais cela n'a pas d'importance). En raisonnant comme dans le premier cas, on obtient que H décrit le cercle de diamètre $[SO]$; dans le cas présent, il le décrit dans sa totalité parce que, S étant intérieur à Γ , toute droite passant par S coupe Γ .

On peut remarquer au passage que ce troisième cas s'applique encore si $\Gamma = \Gamma'$, auquel cas $S = O$ et le lieu est $\{O\}$.

4. Soit Γ un cercle fixe de rayon R . On considère un triangle variable ABC inscrit dans Γ , vérifiant $AB = AC$, et on note h sa hauteur issue de A .
Quelle est la valeur maximale de $h + BC$?

Solution.

Notons α l'angle \widehat{BAC} ; il est compris entre 0 et π .

On a $BC = 2R \sin \alpha$.

D'autre part, soit O le centre du cercle et I le milieu de BC . Comme $\widehat{BOC} = 2\alpha$, on a $\widehat{BOI} = \alpha$.
Avec $\vec{AI} = \vec{AO} + \vec{OI}$, on obtient alors $h = R + R \cos \alpha$.

Finalement $h + BC = Rf(\alpha)$ où $f(\alpha) = 1 + 2 \sin \alpha + \cos \alpha$.

On a $f'(\alpha) = 2 \cos \alpha - \sin \alpha$. L'étude du signe de $f'(\alpha)$ montre que f est maximale pour la valeur α_0 telle que $\tan \alpha_0 = 2$, ce qui donne $\cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin \alpha_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et finalement $f(\alpha_0) = 1 + \sqrt{5}$.

(Remarque : de façon générale, il est connu que le maximum de $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.)

On conclut que la valeur maximale de $h + BC$ est $R(1 + \sqrt{5})$.

5. Soit ABC un triangle. On suppose que D, E, F sont trois points sur les côtés BC, CA, AB respectivement tels que les rayons des cercles inscrits dans les triangles AEF, BFD, CDE aient une valeur commune r_1 .

On note r le rayon du cercle inscrit dans ABC et r_2 le rayon du cercle inscrit dans DEF .

Montrer $r_1 + r_2 = r$.

Solution.

Soient I, J, K, L les centres des cercles inscrits dans les triangles ABC, AEF, BFD, CDE .

• *Première étape* : les triangles JKL et ABC sont homothétiques.

Comme K et L sont à la distance r_1 de BC , les droites (KL) et (BC) sont parallèles ; on a de même (JK) et (JL) parallèles à (AB) et (AC) respectivement. On en déduit que les triangles JKL et ABC sont homothétiques. Le centre d'homothétie est I , puisque les droites $(AJ), (BK), (CL)$ sont les bissectrices de ABC .

• *Deuxième étape* : les triangles DEF et JKL ont même périmètre.

Soit Q le point de contact de DF avec le cercle inscrit dans BDF et soit R le point de contact de DE avec le cercle inscrit dans CDE . Soient K' et L' les projetés de K et L sur BC . On a $DQ = DK'$ et $DR = DL'$, donc

$$KL = K'L' = K'D + DL' = DQ + DR.$$

De même, $JK = FQ + FP$ où P est le point de contact de EF avec le cercle inscrit dans AEF . Enfin $JL = EP + ER$. En sommant,

$$IJ + JK + KL = DE + EF + FD.$$

• *Troisième étape* : les triangles DEF et JKL ont même aire.

Notant S_{XYZ} l'aire d'un triangle XYZ , on a

$$\begin{aligned} S_{ABC} - S_{DEF} &= S_{AEF} + S_{BFD} + S_{CDE} \\ &= \frac{AE + EF + FA}{2} r_1 + \frac{BD + DF + FB}{2} r_1 + \frac{CE + EF + FC}{2} r_1 \\ &= \frac{r_1}{2} (AB + BC + CA + DE + EF + FD). \end{aligned}$$

D'autre part, en considérant les trapèzes $AJKB, BKLC$ et $AJLC$, on obtient

$$S_{ABC} - S_{JKL} = \frac{r_1}{2} (AB + BC + CA + JK + KL + LJ).$$

Avec la deuxième étape, on constate que $S_{ABC} - S_{DEF} = S_{ABC} - S_{JKL}$, et donc

$$S_{DEF} = S_{JKL}.$$

• *Quatrième étape* : les rayons des cercles inscrits dans DEF et JKL sont égaux.

Le rayon du cercle inscrit dans un triangle est le quotient de son aire et de son demi-périmètre : il suffit alors d'utiliser les deux étapes précédentes.

• *Conclusion.*

La distance de I à BC vaut r . D'autre part, cette distance est la somme de la distance de I à KL et de la distance entre KL et BC ; la première distance est égale au rayon du cercle inscrit dans JKL , donc, d'après la quatrième étape, au rayon r_2 du cercle inscrit dans DEF ; la seconde distance vaut r_1 . Finalement

$$r = r_1 + r_2.$$

6. Dans le plan, on considère quatre droites, deux à deux non parallèles, trois à trois non concourantes. Montrer que les cercles circonscrits aux quatre triangles formés par trois de ces droites concourent en un point P , et que les centres des quatre cercles circonscrits sont sur un même cercle passant par P .

Solution.

• *Les cercles sont concourants.*

On note $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ les quatre droites, A_{ij} le point d'intersection de Δ_i et Δ_j .

On note Γ_1 le cercle circonscrit au triangle $A_{23}A_{34}A_{24}$ et O_1 son centre ; le cercle Γ_i est défini de façon analogue et O_i est son centre.

Soit S le second point d'intersection de Γ_1 et Γ_2 .

Première méthode : chasse aux angles.

Montrons que S appartient à Γ_3 . Notant (D, D') l'angle orienté de deux droites D et D' , on a

$$\begin{aligned} (PA_{14}, PA_{24}) &= (PA_{14}, PA_{34}) + (PA_{34}, PA_{24}) \\ &= (A_{13}A_{14}, A_{13}A_{34}) + (A_{23}A_{34}, A_{23}A_{24}) \\ &= (\Delta_1, \Delta_3) + (\Delta_3, \Delta_2) \\ &= (\Delta_1, \Delta_2) \\ &= (A_{12}A_{14}, A_{12}A_{24}), \end{aligned}$$

donc $PA_{12}A_{14}A_{24}$ est un quadrilatère inscriptible, ce qui signifie que P appartient à Γ_3 . De même, P appartient à Γ_4 .

Deuxième méthode : théorème de Simson.

D'après le théorème de la droite de Simson, les projetés de P sur les droites $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sont alignés car P appartient à Γ_1 ; de même, les projetés de P sur les droites $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_4$ sont alignés car P appartient à Γ_2 . On en déduit que les quatre projetés de P sur les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sont alignés. Avec les réciproque du théorème de Simson, l'alignement des projetés de P sur les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4$ montre que P appartient à Γ_3 ; de même P appartient à Γ_4 .

Troisième méthode : similitudes.

On montre que le centre de la similitude directe qui envoie A_{13} et A_{14} sur A_{23} et A_{24} (qui est aussi le centre de la similitude qui envoie A_{13} et A_{23} sur A_{14} et A_{24}) appartient aux quatre cercles Γ_i . Les détails sont laissés au lecteur (c'est dans le domaine des connaissances classiques sur le centre de similitude).

• *Les centres sont sur un même cercle passant par P .*

Première méthode : chasse aux angles.

Comme $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \{P, A_{14}\}$, la droite (O_2O_3) est la médiatrice de $[PA_{14}]$. De même, (O_1O_3) est médiatrice de $[PA_{24}]$. On en déduit $(O_2O_3, PA_{14}) = (O_1O_3, PA_{24})$ (angles droits), puis $(O_2O_3, O_1O_3) = (PA_{14}, PA_{24})$. On a vu $(PA_{14}, PA_{24}) = (\Delta_1, \Delta_2)$ (dans la première chasse aux angles ci-dessus), donc $(O_2O_3, O_1O_3) = (\Delta_1, \Delta_2)$; de même $(O_2O_4, O_1O_4) = (\Delta_1, \Delta_2)$. Finalement $(O_2O_3, O_1O_3) = (O_2O_4, O_1O_4)$ et O_1, O_2, O_3, O_4 sont cocycliques.

On laisse au lecteur le soin de justifier $(PO_2, PO_1) = (\Delta_1, \Delta_2)$, ce qui entraîne que P appartient au cercle passant par O_1, O_2, O_3, O_4 .

Seconde méthode : droite de Simson.

Utilisant que (O_2O_3) est la médiatrice de $[PA_{14}]$, on voit que le symétrique de P par rapport à (O_2O_3) est A_{14} . De même, les symétriques de P par rapport à (O_1O_3) et (O_1O_2) sont A_{24} et A_{34} . Finalement, les symétriques de P par rapport aux côtés du triangle $O_1O_2O_3$ sont alignés sur la droite Δ_4 ; il en est de même (par homothétie de centre P de rapport $1/2$) des projetés sur les côtés. Cela implique que P appartient au cercle circonscrit de $O_1O_2O_3$.

De même, P appartient au cercle circonscrit de $O_1O_2O_4$, qui coïncide avec le précédent car ils ont trois points communs P, O_1, O_2 .

Finalement, ce cercle contient les cinq points P, O_1, O_2, O_3, O_4 .