

## Corrigé de l'envoi 6 — 2005/2006

### Problème 1 :

Soit  $n \geq 3$  un entier. Montrer que pour tous réels strictement positifs  $x_1, \dots, x_n$ , on a l'inégalité :

$$\frac{x_n x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

---

### Notre solution :

Une fois de plus (on ne les compte plus!), l'exercice comprenait une erreur d'énoncé : il fallait supposer en outre que les réels  $x_i$  sont rangés par ordre croissant, sinon la conclusion n'est pas vérifiée<sup>1</sup>. Avec cette hypothèse supplémentaire, on peut résoudre l'exercice comme suit.

On remarque dans un premier temps que si  $0 \leq x \leq y$  et si  $0 < a \leq 1$ , alors on a :

$$x + y \leq ax + \frac{y}{a}.$$

(Il suffit pour le voir de faire la différence et de factoriser le numérateur.) En appliquant ceci à  $x = x_i$ ,  $y = \frac{x_{n-1} x_{i+1}}{x_2}$  et  $a = \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}}$ , on obtient l'inégalité :

$$x_i + \frac{x_{n-1}}{x_2} \cdot x_{i+1} \leq \frac{x_i x_{i+1}}{x_{i+2}} + \frac{x_{n-1}}{x_2} \cdot x_{i+2}$$

valable pour  $1 \leq i \leq n-2$ . De même, avec  $x = x_n$ ,  $y = \frac{x_{n-1} x_n}{x_2}$  et  $a = \frac{x_1}{x_2}$ , il vient :

$$x_n + \frac{x_{n-1} x_n}{x_2} \leq \frac{x_n x_1}{x_2} + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1}.$$

On obtient finalement l'inégalité désirée en sommant les inégalités précédentes.

---

<sup>1</sup>Comme nouvel exercice, vous pouvez chercher un contre-exemple.

## Corrigé de l'envoi 6 — 2005/2006

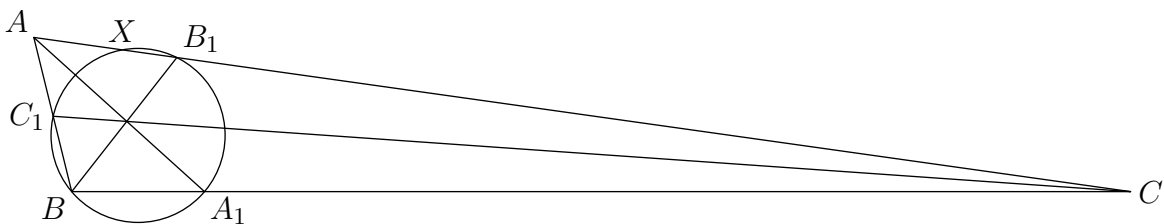
### Problème 2 :

Soit  $ABC$  un triangle. On note  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$  les points d'intersection des bissectrices des angles de  $ABC$  avec les côtés opposés respectifs. On suppose que les points  $B$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$  sont cocycliques. Prouver la relation :

$$\frac{BC}{AC + AB} = \frac{AC}{AB + BC} - \frac{AB}{BC + AC}.$$

### Notre solution :

Commençons par tracer une figure claire, ce qui est déjà loin d'être facile<sup>2</sup> :



Appelons  $\Gamma$  le cercle circonscrit à  $BA_1B_1C_1$ . Il intersecte la droite  $(AC)$  en  $X$  et  $B_1$ . On commence par prouver que  $X$  appartient à  $[AC]$  : en effet,  $A$  appartient à la droite  $(BC_1)$  mais pas au segment  $[BC_1]$ , donc  $A$  est extérieur à  $\Gamma$ . De même  $C$  est extérieur à  $\Gamma$ . Par contre, tout le segment  $[B_1X]$  est lui intérieur à  $\Gamma$ , et donc ne peut contenir ni  $A$  ni  $C$ . Comme  $B_1$  appartient au segment  $[AC]$  c'est donc qu'il en est de même de  $X$ .

On pose  $a = BC$ ,  $b = CA$  et  $c = AB$ . En utilisant la puissance de  $A$  par rapport à  $\Gamma$ , on a  $AC_1 \cdot AB = AX \cdot AB_1$ . D'autre part, en appliquant la loi des sinus dans les triangles  $ACC_1$ ,  $BCC_1$  et  $ABC$ , on obtient :

$$\frac{AC_1}{\sin(\hat{C}/2)} = \frac{CC_1}{\sin \hat{A}} \quad ; \quad \frac{BC_1}{\sin(\hat{C}/2)} = \frac{CC_1}{\sin \hat{B}} \quad ; \quad \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

d'où on déduit sans mal  $\frac{AC_1}{a} = \frac{BC_1}{b}$  puis  $AC_1 = \frac{bc}{a+b}$ . De même,  $AB_1 = \frac{bc}{a+c}$ . Par suite  $AX = \frac{AC_1 \cdot AB}{AB_1} = \frac{c(a+c)}{a+b}$  et  $CX = \frac{a(a+c)}{b+c}$ . Ainsi :

$$b = AC = AX + XC = (a+c) \left( \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} \right)$$

d'où la conclusion.

<sup>2</sup>On peut par exemple s'aider du résultat à prouver pour obtenir une configuration dans laquelle les quatre points sont bien cocycliques.

## Corrigé de l'envoi 6 — 2005/2006

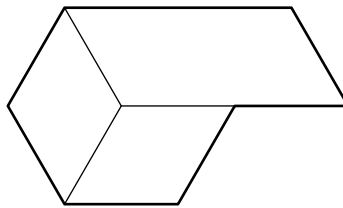
### Problème 3 :

Quel est le plus petit entier  $n$  impair pour lequel il existe un polygone à  $n$  côtés (pas nécessairement convexe) qui puisse être pavé (sans trou ni chevauchement) par des parallélogrammes ?

---

### Notre solution :

Tout d'abord, la figure suivante montre qu'il y a une solution avec  $n = 7$  :



Nous allons montrer qu'il s'agit de la plus petite valeur. Pour cela, donnons-nous un  $n$ -gone que l'on suppose pavé par un nombre fini de parallélogrammes. Si  $c$  est un côté du  $n$ -gone, au moins un des parallélogrammes du pavage a un de ses côtés parallèle à  $c$ . De plus, parmi les côtés précédents, le plus éloigné de  $c$  (disons  $c'$ ) est nécessairement un morceau d'un autre côté du  $n$ -gone (car sinon, il devrait exister un autre parallélogramme rencontrant  $c'$ , mais le côté de ce parallélogramme faisant face à  $c'$  serait encore plus éloigné de  $c$ ). De cela, on déduit que tout côté du  $n$ -gone est parallèle à un autre de ses côtés.

Cette dernière constatation est clairement irréalisable si  $n = 3$ . Si  $n = 5$ , cela implique d'avoir trois côtés parallèles, mais c'est impossible car parmi ces trois côtés, deux sont nécessairement consécutifs.

## Corrigé de l'envoi 6 — 2005/2006

### Problème 4 :

Montrer qu'il existe dix nombres réels distincts  $a_1, \dots, a_{10}$  pour lesquels l'équation :

$$(x - a_1) \cdots (x - a_{10}) = (x + a_1) \cdots (x + a_{10})$$

admet exactement cinq solutions.

---

### Notre solution :

On va montrer que n'importe quel uplet  $(a_1, \dots, a_{10})$  de réels deux à deux distincts avec  $a_6 = a_7 + a_8 = a_9 + a_{10} = 0$  et  $a_1, \dots, a_5 > 0$  convient. En effet, pour un tel uplet, les réels  $a_6, \dots, a_{10}$  sont solutions de l'équation et il s'agit de montrer que ce sont les seuls.

Après division par  $(x - a_6) \cdots (x - a_{10})$ , on obtient :

$$(x + a_1) \cdots (x + a_5) = (x - a_1) \cdots (x - a_5)$$

et il suffit donc de montrer que cette dernière équation n'admet pas de solution (non nulle). Comme les  $a_i$  sont strictement positifs, si  $x > 0$ , le membre de gauche est clairement strictement supérieur en valeur absolue à celui de droite et donc l'égalité ne peut avoir lieu. D'autre part, on remarque que  $x$  est solution, il en est de même de  $-x$ , et donc il n'y a pas non plus de solutions avec  $x < 0$ . Cela termine l'exercice.

## Corrigé de l'envoi 6 — 2005/2006

### Problème 5 :

Les entiers de 1 à  $N$  sont coloriés soit en blanc, soit en noir. On peut ensuite (autant de fois qu'on le souhaite) modifier simultanément la couleur de trois entiers qui sont en progression arithmétique.

Pour quelles valeurs de  $N$ , est-il possible à partir d'une coloration de départ quelconque d'obtenir au final que des entiers blancs ?

---

### Notre solution :

Pour éviter les discussions pathologiques sur les petits cas, on ne raisonne que pour  $N \geq 3$ . Nous allons prouver que c'est possible pour  $N \geq 8$  et impossible sinon.

Tout d'abord, supposons  $N \leq 7$  et concentrons sur le nombre  $X$  d'entiers de  $\{1, \dots, N\}$  qui sont à la fois noirs et non congrus à 1 modulo 3. Lorsque l'on fait un changement autorisé, le nombre  $X$  varie soit de 2, soit de 0. En effet, si la raison de la suite est première avec 3, exactement deux termes de cette suite ne sont pas congrus à 1 modulo 3, d'où on tire l'affirmation. Si la raison est multiple de 3, alors la suite arithmétique ne peut être que  $(1, 4, 7)$  (puisque  $N \leq 7$ ) qui est formée de trois entiers congrus à 1 modulo 3 ; ainsi  $X$  ne change pas.

On déduit de ces considérations que la parité de  $X$  est conservée. Initialement, il est possible de faire en sorte qu'elle soit impaire. Et alors, il est impossible d'aboutir à une situation où tous les nombres sont blancs, car alors  $X$  devrait être nul (donc pair).

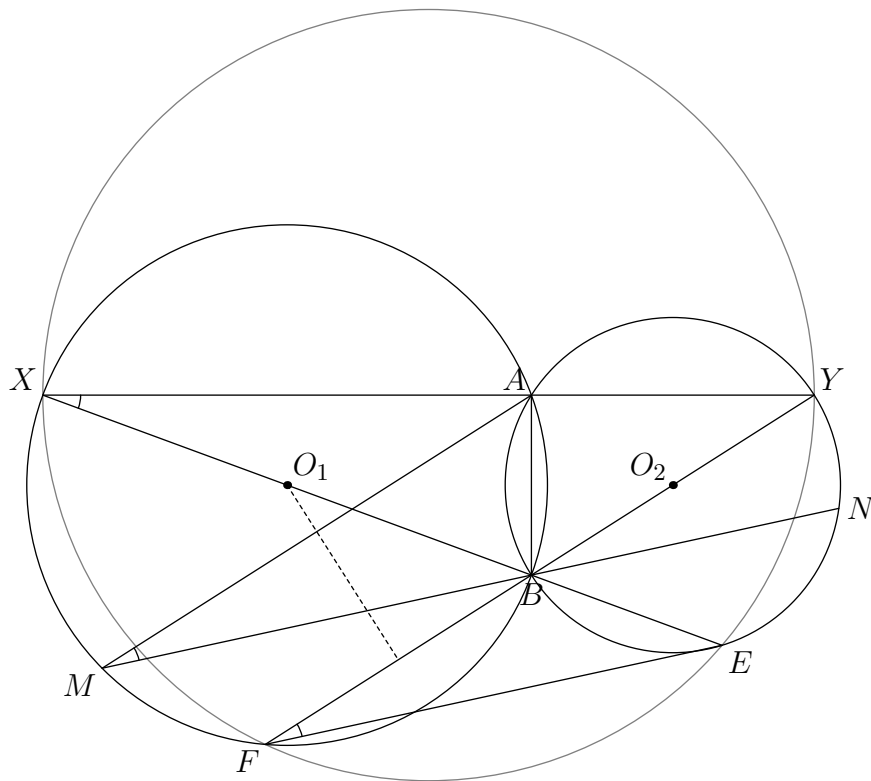
Supposons désormais  $N \geq 8$ . Étant donné un entier  $n \in \{1, \dots, N\}$ , on va montrer qu'il est alors possible de modifier la couleur de l'unique entier  $n$ . Si  $n \geq N - 6$ , on modifie pour cela successivement la couleur des suites arithmétiques  $(n, n + 3, n + 6)$ ,  $(n + 3, n + 4, n + 5)$  puis  $(n + 4, n + 5, n + 6)$ . Sinon, le plus économique est de procéder par récurrence : pour modifier la couleur de  $n$ , on modifie celle de  $n - 1$  et de  $n - 2$ , puis celle de la suite arithmétique  $(n - 2, n - 1, n)$ .

## Corrigé de l'envoi 6 — 2005/2006

### Problème 6 :

Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux cercles de centres respectifs  $O_1$  et  $O_2$  qui se coupent en deux points distincts  $A$  et  $B$ . La droite  $(O_1B)$  (resp.  $(O_2B)$ ) recoupe  $\mathcal{C}_2$  (resp.  $\mathcal{C}_1$ ) au point  $F$  (resp.  $E$ ). La parallèle à  $(EF)$  passant par  $B$  rencontre  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  respectivement en  $M$  et  $N$ . Si  $B$  est situé entre  $M$  et  $N$ , montrer que  $MN = AE + AF$ .

### Notre solution :



Comme le montre la figure précédente, introduisons les points  $X$  et  $Y$  diamétralement opposés à  $B$  dans les cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Les angles  $\widehat{XAB}$  et  $\widehat{BAY}$  sont droits, ce qui montre l'alignement des points  $X$ ,  $A$  et  $Y$ . Par ailleurs, les triangles  $XFY$  et  $XEY$  sont aussi rectangles, et donc les points  $X$ ,  $Y$ ,  $E$  et  $F$  sont cocycliques sur le cercle de diamètre  $[XY]$ . Il s'ensuit l'égalité d'angles :

$$\widehat{YFE} = \widehat{YXE} = \widehat{AMB}$$

la dernière égalité provenant de la cocyclicité dans  $\mathcal{C}_1$ . Comme  $(EF)$  et  $(MN)$  sont parallèles, on déduit qu'il va de même pour  $(AM)$  et  $(BF)$  puis pour les médiatrices des segments respectifs. Mais ces deux médiatrices passent en outre par le point  $O_1$ , elles sont donc confondues et fournissent un axe de symétrie du quadrilatère  $AMFB$ . Ses diagonales  $[AF]$  et  $[BM]$  ont donc même longueur.

De même, on obtient  $AE = BN$ , et par suite  $AE + AF = BM + BN = MN$ .