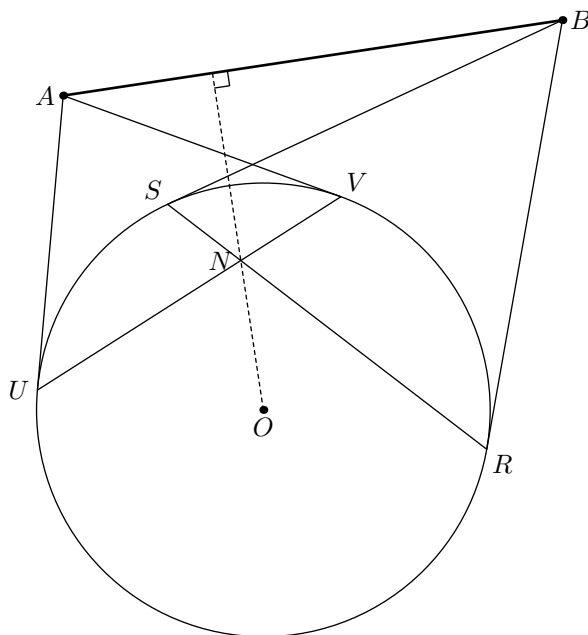


## Corrigé de l'envoi 5 — 2005/2006

### Problème 1 :

Les cordes  $[UV]$  et  $[RS]$  d'un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  se rencontrent en  $N$ . On suppose que le segment  $[AB]$  est extérieur à  $\mathcal{C}$  et que  $(AU)$ ,  $(AV)$ ,  $(BR)$ ,  $(BS)$  sont tangentes à  $\mathcal{C}$ . Prouver que  $(ON)$  est perpendiculaire à  $(AB)$ .

### Notre solution :



Si l'on se rappelle les propriétés des droites et points polaires, l'exercice est très simple. Les hypothèses disent que  $(UV)$  est la polaire de  $A$  et que  $(RS)$  est celle de  $B$ . Ainsi les points  $N$  et  $A$  d'une part et  $N$  et  $B$  d'autre part sont conjugués. Autrement dit,  $(AB)$  est la droite polaire de  $N$  d'où l'on déduit la perpendicularité demandée.

Si l'on ne se rappelle plus les propriétés précédentes, on peut raisonner comme suit (ce qui revient essentiellement au même). De la perpendicularité des droites  $(OU)$  et  $(UA)$ , on déduit :

$$\overrightarrow{OU} \cdot \overrightarrow{OA} = OU^2 = R^2$$

si  $R$  désigne le rayon du cercle  $\mathcal{C}$ . De même, il vient  $\overrightarrow{OV} \cdot \overrightarrow{OA} = R^2$ . Ainsi la droite  $(UV)$  a pour équation  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = R^2$ , d'où l'on déduit  $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OA} = R^2$ .

De même, on obtient  $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2$ , et en combinant les deux dernières égalités, il reste  $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ , ce qui implique la perpendicularité demandée.

## Corrigé de l'envoi 5 — 2005/2006

### Problème 2 :

Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  pour lesquels la fraction  $\frac{1}{n(n+3)}$  est un nombre décimal.

---

### Notre solution :

Pour que la fraction soit un nombre décimal, il faut et il suffit que  $n(n+3)$  soit de la forme  $2^\alpha 5^\beta$ , ce qui se produit si, et seulement si c'est le cas pour chacun de deux facteurs. Mais bien sûr,  $n$  et  $n+3$  ne peuvent être ni simultanément pairs, ni simultanément multiples de 5. Ainsi, la condition est que l'un des deux soit une puissance de 2 et l'autre une puissance de 5.

Si  $n = 2^\alpha$  et  $n+3 = 5^\beta$ , on déduit  $2^\alpha + 3 = 5^\beta$  et donc  $2^\alpha \equiv 2 \pmod{4}$ . Ceci implique  $\alpha = 1$  et par suite  $\beta = 1$ . On obtient ainsi la solution  $n = 2$  qui est l'unique pour ce cas.

Si  $n = 5^\alpha$  et  $n+3 = 2^\beta$ , il vient  $5^\alpha + 3 = 2^\beta$  et comme précédemment, on cherche à borner les solutions en regardant certaines congruences. Cependant, cette fois-ci, le travail est plus pénible. On commence par remarquer que  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 3$  conduisent aux trois solutions  $n = 1$ ,  $n = 5$  et  $n = 125$ .

Nous allons montrer que ce sont les seules, autrement dit que l'équation  $5^\alpha + 3 = 2^\beta$  n'admet aucune solution avec  $\alpha > 3$ . Cette dernière condition implique  $\beta > 7$  et donc l'équation se réécrit :

$$5^3(5^a - 1) = 2^7(2^b - 1). \quad (1)$$

avec  $a = \alpha - 3 > 0$  et  $b = \beta - 7 > 0$ . On déduit de l'égalité précédente que  $2^7$  divise  $5^a - 1$ , ce qui ne se produit<sup>1</sup> que si  $a$  est multiple de 32. Le membre de gauche de (1) est alors divisible par  $5^{32} - 1$  et donc en particulier par  $5^8 + 1$ . La décomposition en facteur premier de ce nombre est  $2 \times 17 \times 11489$ . Ainsi,  $2^b - 1$  est divisible par  $p = 11489$ .

L'ordre de 2 modulo  $p$  est un diviseur de  $p - 1 = 2^5 \times 359$  et par une recherche rapide, on trouve que c'est  $16 \times 359$ . On en déduit que  $b$  est un multiple de  $16 \times 359$  et donc en particulier de 16. Il s'ensuit que  $5^a - 1$  est multiple de  $2^{16} - 1$  et donc de  $2^8 + 1 = 257$ . Comme précédemment, on détermine l'ordre de 5 modulo 257 (qui est premier) : c'est 256. Ainsi  $a$  est un multiple de 256 et donc  $2^7(2^b - 1)$  est divisible par  $5^{256} - 1$ . Mais c'est impossible car ce dernier nombre est multiple<sup>2</sup> de  $2^{10}$ .

---

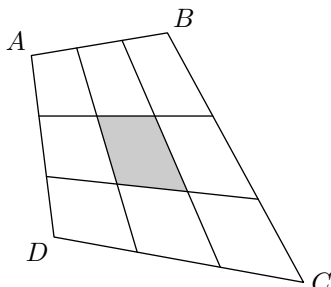
<sup>1</sup>Pour le voir, on peut faire une étude de cas modulo  $2^7 = 128$ , ou prouver plus généralement (par récurrence sur  $k$ ) que  $2^k$  divise  $5^a - 1$  si, et seulement si  $a$  est un multiple de  $2^{k-2}$ .

<sup>2</sup>Pour le voir simplement, on peut appliquer à nouveau le résultat de la précédente note de bas de page.

## Corrigé de l'envoi 5 — 2005/2006

### Problème 3 :

Dans la figure ci-dessous,  $ABCD$  est un quadrilatère d'aire 1 dont chacun des côtés est découpé en trois parties de même longueur :

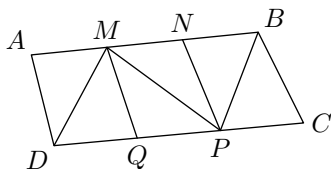


Calculer l'aire de la surface grisée.

### Notre solution :

La réponse est bien entendu  $\frac{1}{9}$ .

Pour le prouver on commence par traiter le problème plus simple suivant. Étant donnée la figure suivante (où les côtés  $[AB]$  et  $[CD]$  sont découpés en trois parties égales) :

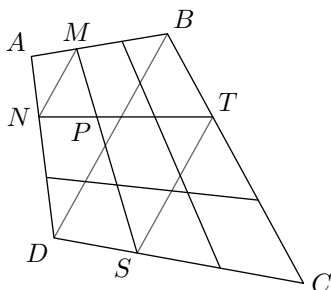


on montre que l'aire de  $MNPQ$  est le tiers de celle de  $ABCD$ . Puisque les triangles  $DQM$  et  $PQM$  ont une hauteur en commun et la base correspondante de même longueur, ils ont même aire. De même pour les triangle  $MNP$  et  $BNP$ . D'autre part le triangle  $AMD$  a pour aire le tiers de celle de  $ABD$  puisque ces triangles ont même hauteur et que les bases correspondantes sont dans un rapport  $\frac{1}{3}$ . Pareillement, on obtient  $\mathcal{A}(BCP) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(BCD)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(AMD) + \mathcal{A}(DQM) + \mathcal{A}(PQM) + \mathcal{A}(MNP) + \mathcal{A}(PNB) + \mathcal{A}(BCP) \\ &= \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABD) + 2\mathcal{A}(PQM) + 2\mathcal{A}(MNP) + \frac{1}{3}\mathcal{A}(BCD) \\ &= \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABCD) + 2\mathcal{A}(MNPQ) \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Revenons à présent à la figure d'origine et nommons les points comme sur la figure ci-dessous.



Pour conclure, en appliquant deux fois le résultat préliminaire, il suffit de montrer que  $P$  est au tiers du segment  $[MS]$  (et d'autres résultats similaires qui s'obtiennent pareillement). On remarque pour cela que le théorème de Thalès implique que les droites  $(MN)$ ,  $(BD)$  et  $(ST)$  sont parallèles et que  $MN = \frac{1}{3}BD$  et  $ST = \frac{2}{3}BD$ . Pour conclure, on applique une dernière fois le théorème de Thalès dans le triangle  $MPN$  avec les parallèles  $(MN)$  et  $(ST)$ .

## Corrigé de l'envoi 5 — 2005/2006

### Problème 4 :

Expliquer comment construire à la règle et au compas un triangle dont les hauteurs ont pour longueur 5, 7 et 11. (On suppose donné uniquement un segment de longueur 1.)

---

### Notre solution :

On constate que si les hauteurs d'un triangle  $ABC$  mesurent respectivement 5, 7 et 11, alors ses longueurs sont soumises à la relation  $5a = 7b = 11c = 2S$  où  $S$  est la surface du triangle.

Ainsi, on commence par construire un triangle  $ABC$  dont les longueurs sont proportionnelles aux nombres  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  et  $\frac{1}{11}$ . Pour cela, on peut simplement construire les nombres précités, ou plus adroitement dessiner un triangle dont les côtés ont pour longueur 5, 7 et 11 et obtenir les longueurs des côtés de  $ABC$  en reportant les longueurs des hauteurs de ce premier triangle.

Une fois  $ABC$  construit, il ne reste plus qu'à faire une dilatation pour que ses hauteurs mesurent effectivement 5, 7 et 11. On trace pour cela la plus petite hauteur et un segment de longueur 5 parallèle à celle-ci. Un triangle convenable est l'image de  $ABC$  par l'homothétie qui transforme la hauteur précédente en le segment de longueur 5 considéré.

## Corrigé de l'envoi 5 — 2005/2006

### Problème 5 :

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des entiers avec  $b < c$ . Prouver la relation :

$$\binom{a}{a} \binom{c}{b} + \binom{a+1}{a} \binom{c-1}{b} + \binom{a+2}{a} \binom{c-2}{b} + \cdots + \binom{a+c-b}{a} \binom{b}{b} = \binom{a+c+1}{a+b+1}.$$

---

### Notre solution :

Une méthode efficace consiste à trouver une interprétation combinatoire de chacun des termes de l'égalité. Pour cela, remarquons que si  $N$  et  $n$  sont deux entiers, alors le nombre de suites  $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  strictement croissantes d'entiers strictement positifs vérifiant  $x_{n+1} = N$  est donné par  $\binom{N-1}{n}$ . (En effet, se donner une telle suite revient à se donner l'ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$  qui est une partie à  $n$  éléments de  $\{1, \dots, N-1\}$ .)

Appliquons cela à  $n = a + b + 1$  et  $N = a + c + 2$ . Le terme de droite de l'égalité est donc exactement le nombre de suites  $(x_i)_{1 \leq i \leq a+b+2}$  strictement croissantes d'entiers strictement positifs avec  $x_{a+b+2} = a + c + 2$ .

Dénombrons d'une seconde façon ces suites en regroupant celles pour lesquelles  $x_{a+1} = p + 1$  pour  $p$  variant dans  $\mathbb{N}$  (ou si l'on préfère entre  $a + 1$  et  $a + c + 1 - b$ , mais cela importe peu). D'après le préliminaire, il y a exactement  $\binom{p}{a}$  façons de choisir les  $x_i$  pour  $i \leq a$  et exactement  $\binom{a+c-p}{b}$  façons de choisir les  $x_i$  pour  $i > a + 1$ . Au final, il y a donc :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p}{a} \binom{a+c-p}{b}$$

suites  $(x_i)$  possibles. Ainsi ce nombre vaut  $\binom{a+b+1}{a+c+1}$ , et on termine l'exercice en éliminant les termes nuls dans la somme précédente.

## Corrigé de l'envoi 5 — 2005/2006

### Problème 6 :

Trouver le plus petit entier  $N$  qui s'écrive sous la forme  $N = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$  de telle façon que tous les  $N - a_i$  soient des carrés parfaits.

---

### Notre solution :

L'énoncé de cet exercice était pour le moins imprécis : il fallait comprendre que les  $a_i$  sont des entiers strictement positifs *deux à deux distincts*. Nous donnons la solution dans ce cas.

Supposons les  $a_i$  triés par ordre croissant. Posons  $b_i^2 = N - a_i$ . Les  $b_i$  sont alors des entiers deux à deux distincts, rangés par ordre décroissant. Ainsi  $b_i \leq b - i + 1$  où  $b = b_1$ . D'autre part, la connaissance des  $b_i$  permet de retrouver  $N$  (c'est le cinquième de la somme de leurs carrés) et puis chacun des  $a_i$ . Ainsi, il suffit de trouver les plus petits  $b_i$  vérifiant les inégalités précédentes, avec en outre  $b_1^2 + \dots + b_6^2$  multiple de 5.

Les conditions précédentes permettent d'obtenir une borne sur  $b$ . En effet :

$$b_2^2 + \dots + b_6^2 - 4b_1^2 = (N - a_2) + \dots + (N - a_6) - 4(N - a_1) = 5a_1 \geq 5$$

d'où l'inégalité :

$$(b - 1)^2 + \dots + (b - 5)^2 - 4b^2 \geq 5$$

qui se simplifie en  $b^2 - 30b + 50 \geq 0$  et fournit  $b \geq 29$ .

Voyons s'il y a une solution avec  $b = 29$ . Le même raisonnement que précédemment entraîne  $b_2 \geq 28$  (et donc  $b_2 = 28$ ), puis  $b_3 = 27$ ,  $b_4 = 26$ ,  $b_5 = 25$ ,  $b_6 = 24$ . Mais on vérifie que la somme des carrés des  $b_i$  n'est pas un multiple de 5. Ainsi on n'a pas obtenu de solution.

Regardons à présent le cas  $b = 30$ . Comme précédemment, on obtient  $b_2 = 29$ ,  $b_3 = 28$ ,  $b_4 = 27$ ,  $b_5 = 26$ ,  $b_6 \geq 24$ . Si  $b_6 = 24$ , on n'a encore pas de solution, par contre  $b_6 = 25$  en fournit une. La valeur de  $N$  correspondante (qui est bien sûr la plus petite) est 911.