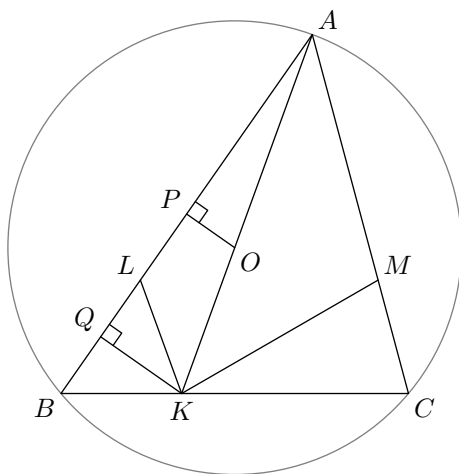


Corrigé de l'envoi 2 — 2005/2006

Problème 1 :

Soit ABC un triangle acutangle (*i.e.* dont tous les angles sont aigus). On note O le centre du cercle circonscrit à ABC . Les droites (AO) et (BC) se coupent en K . Sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle, on place les points L et M tels que $KL = KB$ et $KM = KC$. Montrer que les droites (LM) et (BC) sont parallèles.

Notre solution :



Bien entendu, on va être amené à utiliser le théorème de Thalès et pour cela, on cherche à évaluer les rapports $\frac{LB}{AB}$ et $\frac{MC}{AC}$. Introduisons les points P et Q projetés respectifs de O et K sur la droite (AB) . D'après les hypothèses P est le milieu de $[AB]$, alors que Q est celui de $[LB]$. On a alors :

$$\frac{LB}{AB} = 2 \frac{QB}{AB} = 2 \left(1 - \frac{AQ}{AB} \right) = 2 - \frac{AQ}{AP} = 2 - \frac{AK}{AO}$$

la dernière égalité résultant du théorème de Thalès dans le triangle AKQ avec la parallèle (OP) . De même, on obtient :

$$\frac{MC}{AC} = 2 - \frac{AK}{AO}$$

d'où on déduit le parallélisme voulu.

Corrigé de l'envoi 2 — 2005/2006

Problème 2 :

Trouver tous les entiers $n \geq 1$ pour lesquels le nombre de diviseurs positifs de $\text{PPCM}(1, 2, \dots, n)$ est une puissance de 2.

Notre solution :

On rappelle que si la décomposition en facteurs premiers d'un entier N est :

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_d^{a_d}$$

le nombre de diviseurs positifs de N est donné par l'expression $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_d + 1)$. Ainsi pour ce que nombre soit une puissance de 2, il faut que chacun des facteurs en soit une. En particulier, s'il existe un indice i tel que $a_i = 2$, le nombre de diviseurs positifs de N ne peut être une puissance de 2.

Étant donné un entier n , on cherche s'il existe un nombre premier p tel que la puissance de p qui apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de $N = \text{PPCM}(1, 2, \dots, n)$ est 2. Ceci se produit si, et seulement si $p^2 \leq n < p^3$, c'est-à-dire :

$$\sqrt[3]{n} < p \leq \sqrt{n}.$$

Le postulat de Bertrand assure que pour tout réel $x > 1$, il existe un nombre premier compris entre x et $2x$. Ainsi dès que $\sqrt{n} > 2\sqrt[3]{n}$, un tel nombre premier p existe et l'entier n n'est pas solution de l'énoncé. L'inégalité précédente est vérifiée dès que $n > 64$, ainsi aucun nombre strictement supérieur à 64 n'est solution.

D'autre part, le nombre premier $p = 2$ élimine les entiers n compris entre 4 et 7, le nombre $p = 3$ ceux entre 9 et 26 et finalement le nombre $p = 5$ ceux entre 25 et 124. Les seules éventuellement solutions sont donc $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 8$ et on vérifie que tous ces nombres conviennent.

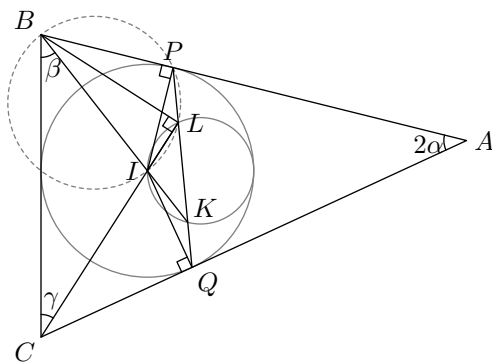
Corrigé de l'envoi 2 — 2005/2006

Problème 3 :

Soit ABC un triangle. On note I le centre de son cercle inscrit et P et Q les points de contact de celui-ci avec les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Les droites (BI) et (CI) rencontrent (PQ) respectivement en K et L . Montrer que le cercle circonscrit à ILK est tangent au cercle inscrit à ABC si, et seulement si $AB + AC = 3BC$.

Notre solution :

Notons 2α , 2β et 2γ les angles respectifs du triangle ABC :



Les angles \widehat{IPA} et \widehat{IQA} sont droits et donc les points A , P , Q et I sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[AI]$. On en déduit que $\widehat{QPI} = \widehat{PQI} = \alpha$. Ainsi, dans le triangle LQC , l'angle en \hat{Q} vaut $\frac{\pi}{2} + \alpha$ et l'angle en \hat{C} vaut γ . Ainsi $\widehat{QLC} = \beta$, et cette valeur est aussi celle de l'angle \widehat{PBI} . Les points P , I , B et L sont donc cocycliques et puis que l'angle \widehat{BLI} est droit. De plus, la somme des angles du triangle IBC vaut π , d'où on déduit $\widehat{BIC} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ puis $\widehat{LIB} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Ainsi, si r désigne le rayon du cercle inscrit à ABC , on a $IL = IB \sin \alpha = r \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, la dernière égalité étant obtenue grâce à la trigonométrie dans le triangle PIB . Pareillement que l'on a prouvé $\widehat{QLC} = \beta$, on obtient $\widehat{LKI} = \gamma$, et donc la loi des sinus appliquée dans le triangle LKI donne $2R = r \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}$ où R désigne le rayon du cercle circonscrit à ILK .

Comme le cercle circonscrit à ILK passe par le centre du cercle inscrit à ABC , le fait qu'ils soient tangents est équivalent à la simple relation $2R = r$, soit encore d'après ce qui précède à $\sin \alpha = \sin \beta \sin \gamma$. En utilisant $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, cette relation se réécrit :

$$\cos \beta \cos \gamma = 2 \sin \beta \sin \gamma. \quad (1)$$

Par ailleurs, si D désigne le diamètre du cercle circonscrit à ABC , on a $AB = D \sin(2\gamma)$, $AC = D \sin(2\beta)$ et $BC = D \sin(2\alpha)$. Ainsi la formule de l'énoncé se réécrit :

$$\sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 3 \sin(2\alpha) = 3 \sin(2\beta + 2\gamma)$$

soit encore $2 \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) = 6 \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta + \gamma)$. En simplifiant par $2 \sin(\beta + \gamma)$ (qui n'est pas nul!), puis en développant les cos, on retombe exactement sur la formule (1), ce qui termine l'exercice.

Corrigé de l'envoi 2 — 2005/2006

Problème 4 :

Soit N un entier strictement positif. On se donne des entiers a_1, \dots, a_n tels que pour toute partie I de $\{1, \dots, n\}$, la somme $\sum_{i \in I} a_i$ n'est pas un multiple de N . Montrer que $n < N$.

Notre solution :

Raisonnons par l'absurde en supposant $n \geq N$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons r_i le reste de la division euclidienne de $a_1 + \dots + a_i$ par N . D'après l'hypothèse r_i est non nul et donc les r_i forment une famille de n entiers compris entre 1 et $N - 1$. Le principe des tiroirs assure qu'il existe $i < j$ tels que $r_i = r_j$. Mais alors le nombre :

$$(a_i + \dots + a_j) - (a_1 + \dots + a_i) = a_{i+1} + \dots + a_j$$

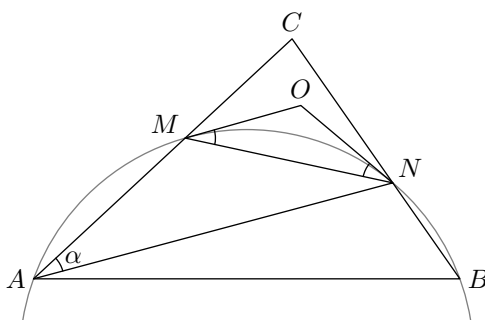
est divisible par N , ce qui n'est pas possible en vertu de l'hypothèse.

Corrigé de l'envoi 2 — 2005/2006

Problème 5 :

Soient ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et Γ un cercle passant par A et B et recoupant les segments $[AC]$ et $[BC]$ respectivement en M et N . Les tangentes à Γ en M et N se coupent au point O . Montrer que O est le centre du cercle circonscrit à CMN si, et seulement si AB est un diamètre de Γ .

Notre solution :



Posons $\alpha = \widehat{CAN}$; c'est l'angle intercepté par l'arc \widehat{MN} , d'où on tire :

$$\widehat{OMN} = \widehat{ONM} = \alpha.$$

Ainsi dans tous les cas $OM = ON$ et donc O est le centre du cercle circonscrit à CMN si, et seulement si, on a l'égalité d'angle $\widehat{MON} = 2\widehat{MCN}$. Or $\widehat{MON} = \pi - 2\alpha$ et $\widehat{MCN} = \pi - \alpha - \widehat{ANC}$. On en déduit que O est le centre du cercle circonscrit à CMN si, et seulement si l'angle \widehat{ANC} est droit, c'est-à-dire si, et seulement si $[AB]$ est un diamètre du cercle Γ .

Corrigé de l'envoi 2 — 2005/2006

Problème 6 :

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x + y)$$

pour tous réels x et y .

Notre solution :

Tout d'abord, on constate qu'en prenant « $x = 1$ » et « $y = -1$ », il vient directement $f(0) = 0$. Une autre remarque importante est la suivante : si f et g sont solutions de l'équation fonctionnelle, alors il en est de même de $f + g$ et de λf pour tout réel λ . (On dit alors que l'ensemble des solutions forment un espace vectoriel.)

L'équation fonctionnelle admet deux solutions évidentes qui sont $f(x) = x$ d'une part et $f(x) = x^2$ d'autre part. Soit à présent f une solution quelconque de l'équation fonctionnelle. D'après la structure d'espace vectoriel, la fonction g définie par $g(x) = f(x) - ax - bx^2$ est encore solution pour tous réels a et b . En outre, il est possible de choisir a et b de sorte que $g(1) = g(2) = 0$.

Soit un réel x différent de 0, 1 et 2. De l'équation fonctionnelle, on tire les égalités :

$$g(x + 1) = \frac{x + 1}{x - 1} g(x) \quad \text{et} \quad g(x + 2) = \frac{x + 2}{x - 2} g(x).$$

La première de ces égalités appliquée deux fois fournit :

$$g(x + 2) = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x(x - 1)} g(x)$$

d'où il vient :

$$\left[\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{(x + 2)(x + 1)}{x(x - 1)} \right] g(x) = \frac{2(x + 2)}{x(x - 1)(x - 2)} g(x) = 0.$$

On en déduit que pour tout $x \neq -2$, on a nécessairement $g(x) = 0$. En appliquant à nouveau la formule qui donne $g(x + 1)$ en fonction de $g(x)$, il vient également $g(-2) = 0$. Finalement g est la fonction nulle et $f(x) = ax + bx^2$ pour tout x .

En conclusion, les seules solutions de l'équation fonctionnelle sont les fonctions $f : x \mapsto ax + bx^2$ pour a et b des réels.