

Corrigé de l'envoi 5 — 2004/2005

Problème 1 :

Le petit chaperon rouge, que nous nommerons Sophie, rencontre le grand méchant loup, répondant au nom de Xavier. Ce dernier, trop bon et trop généreux, ne mange pas la jeune fille mais lui propose le jeu suivant.

Sur un petit tableau (que Xavier garde toujours sur lui), il est inscrit un entier n_0 . Sophie doit alors¹ effacer le nombre n_0 et le remplacer par un des deux entiers $n_0 - 1$, $[n_0/3]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x). On note n_1 l'entier choisi. C'est alors à Xavier de jouer, qui doit effacer n_1 et le remplacer par un entier n_2 égal au choix à $n_1 - 1$ ou $[n_1/3]$. Puis, c'est à nouveau au chaperon de jouer, et ainsi de suite. Le jeu s'arrête lorsqu'un des deux participants peut écrire le nombre 0 et ainsi gagne.

Cependant, le petit chaperon naïf croit que si elle gagne la partie, elle sera libérée. Ainsi, elle fait tout pour gagner. De même, le grand méchant loup fait tout pour gagner, car il aime affirmer sa supériorité sur le chaperon.

Si les deux joueurs jouent au mieux, préciser quel sera le gagnant dans les trois cas suivants² :

$$a) n_0 = 120 \qquad b) n_0 = \frac{3^{2005}-1}{2} \qquad c) n_0 = \frac{3^{2005}+1}{2}$$

Notre solution :

Essayons d'abord de voir ce qui se passe pour les petites valeurs de n_0 . Si $n_0 = 1$, le chaperon peut jouer 0 dès le premier coup, et donc gagne la partie. De même si $n_0 = 2$. Par contre, si $n_0 = 3$, le chaperon est obligé de jouer 1 ou 2, laissant le loup dans une des bonnes situations que l'on vient d'examiner. Si par contre $n_0 = 4$, le chaperon peut jouer 3 et laisser le loup dans la situation néfaste précédente.

Sur la liste des entiers représentés ci-dessous, entourons les entiers donnant la victoire au loup et barrons ceux qui donnent la victoire au chaperon. On a donc déjà :

~~1~~ ~~2~~ (3) ~~4~~ 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

En fait, on peut prouver par les mêmes arguments que précédemment que si n est entouré, alors les entiers $n + 1$, $3n$, $3n + 1$ et $3n + 2$ sont barrés. En effet, si l'entier de départ est un des quatre précédents, le chaperon peut jouer n , et donc laisser le loup dans une situation perdante. On obtient ainsi :

~~1~~ ~~2~~ (3) ~~4~~ 5 6 7 8 ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ 12 13 14 15 16 17 18 19

Le premier entier encore nu, en l'occurrence 5, doit alors être entouré. En effet, à partir de 5, Sophie ne peut jouer que des nombres barrés, laissant alors Xavier dans une position confortable. Ainsi, on obtient un moyen systématique de savoir si les entiers doivent être entourés ou barrés : on entoure le premier entier encore nu, disons n , puis on barre les quatre entiers $n + 1$, $3n$, $3n + 1$ et $3n + 2$, et on continue ainsi. Jusqu'à 39, on peut vérifier que l'on obtient :

~~1~~ ~~2~~ (3) ~~4~~ (5) ~~6~~ (7) ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ (12) ~~13~~ (14) ~~15~~ ~~16~~ ~~17~~ (18) ~~19~~
(20) ~~21~~ ~~22~~ ~~23~~ (24) ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ (29) ~~30~~ (31) ~~32~~ (33) ~~34~~ (35) ~~36~~ (37) ~~38~~ (39)

¹Si elle refuse, le loup la dévore.

²Pour les cas b) et c), on suppose que les participants ont assez de temps et d'endurance pour parvenir jusqu'au bout du jeu.

Il est possible d'aller ainsi jusqu'à 120. Cependant, il est illusoire d'atteindre des nombres de l'ordre de 3^{2005} . Essayons donc plutôt de dégager quelques propriétés de la construction.

Le lemme clé qu'il est utile de dégager ici stipule que si n est entouré, alors il en est de même de $3n + 3$. En effet, pour prouver cela, il suffit de montrer que si n est entouré, alors $3n + 3$ ne peut pas être barré. Mais les seules possibilités pour arriver à barrer $3n + 3$ sont d'entourer $3n + 2$ ou $n + 1$. Or il est clair que ces deux nombres sont barrés puisque n est entouré.

Bref, on vient de prouver que si n est entouré, alors il en est de même de $3n + 3$. On en déduit directement, toujours sous cette hypothèse, que $3n + 4$ est barré, et comme précédemment que $3n + 5$ est entouré.

Ainsi, comme 3 est entouré, on en déduit que 12 l'est aussi, puis également 39 et 120. Ceci permet de répondre au cas a). C'est alors le loup qui gagne et le chaperon sera alors simplement cuit à feu doux, puis mangé.

Plus généralement, définissons une suite (u_n) par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n + 3$. On vérifie directement que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + \frac{3}{2}$ est géométrique de raison 3, d'où on déduit une expression pour (u_n) à savoir :

$$u_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

La propriété prouvée précédemment nous assure que tous les nombres u_n sont entourés, mais également que tous les nombres $u_n + 1$ sont barrés et tous les nombres $u_n + 2$ sont entourés.

Or il est clair que $\frac{3^{2005}-1}{2}$ est de la forme $u_n + 1$ (pour $n = 2004$) et que $\frac{3^{2005}+1}{2}$ est de la forme $u_n + 2$ (pour le même n).

Ainsi pour le b), la chaperon, s'il joue bien, peut décrocher la victoire, ce qui aura pour conséquence de faire entrer le loup dans une rage folle, et le contraindre à éventrer le chaperon avant de le dévorer. Pour le c), les choses sont un peu moins cruelles : le loup pourra simplement savourer tranquillement son dîner.

Corrigé de l'envoi 5 — 2004/2005

Problème 2 :

Soient x , y et z des réels strictement positifs tels que $x + y + z = 1$. Prouver que :

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\frac{yz}{x+yz}} + \sqrt{\frac{zx}{y+zx}} \leq \frac{3}{2}$$

Notre solution :

On commence par remarquer que $z + xy = z(x + y + z) + xy = (x + z)(y + z)$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a alors :

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}} = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right)$$

Bien entendu on a de même :

$$\sqrt{\frac{yz}{x+yz}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+x} \right) \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{zx}{y+zx}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+y} + \frac{x}{x+y} \right)$$

Il suffit alors de sommer ces trois inégalités pour conclure.

Corrigé de l'envoi 5 — 2004/2005

Problème 3 :

Soit ABC un triangle non équilatéral. On suppose qu'il existe un point P intérieur au triangle tel que les trois céviennes³ issues de P aient un même longueur λ , avec $\lambda < \min\{AB, BC, CA\}$.

Prouver qu'il existe un autre point $P' \neq P$, intérieur au triangle, et pour lequel les trois céviennes sont de même longueur.

Notre solution :

Soient $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ les trois céviennes, et soient H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C dans ABC . Soit $[AD']$ le segment obtenu par symétrie de $[AD]$ par rapport à (AH_A) , avec $D' \in (BC)$. On construit de façon analogue les segments $[BE']$ et $[CF']$.

On commence par remarquer que $[AD']$ n'est pas extérieur au triangle ABC : en effet, dans le cas contraire, l'un des segments $[AB]$ ou $[AC]$ serait contenu dans le triangle ADD' , et alors $AD = AD' = \lambda < \min\{AB, AC\}$, ce qui est absurde.

On va montrer que les trois segments $[AD']$, $[BE']$, $[CF']$ sont concourants. On a :

$$\begin{aligned} BD \cdot BD' &= (BH_A + H_AD)(BH_A - H_AD) = BH_A^2 - H_AD^2 \\ &= (AB^2 - AH_A^2) - (AD^2 - AH_A^2) = AB^2 - AD^2 = AB^2 - \lambda^2 \end{aligned}$$

De même $EA \cdot E'A = AB^2 - \lambda^2$. Et ainsi $EA \cdot E'A = BD \cdot BD'$. De même $FB \cdot F'B = CE \cdot CE'$ et $DC \cdot D'C = AF \cdot AF'$. Le théorème de Ceva, appliqué aux trois céviennes $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ donne :

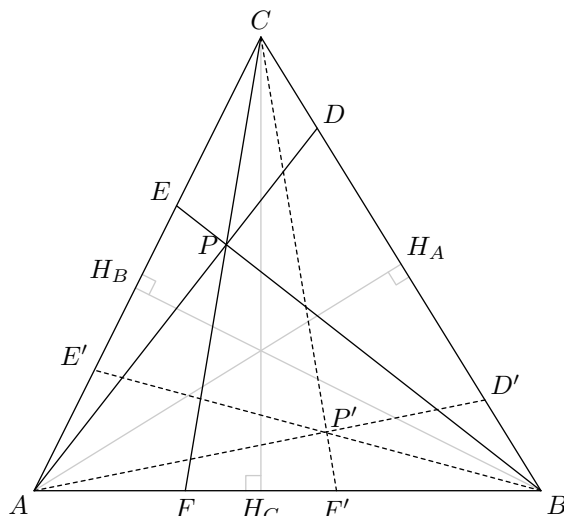
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B} &= \frac{BD' \cdot BD}{D'C \cdot DC} \cdot \frac{CE' \cdot CE}{E'A \cdot EA} \cdot \frac{AF' \cdot AF}{F'B \cdot FB} \\ &= \frac{BD' \cdot BD}{E'A \cdot EA} \cdot \frac{CE' \cdot CE}{F'B \cdot FB} \cdot \frac{AF' \cdot AF}{D'C \cdot DC} = 1 \end{aligned}$$

Le théorème de Ceva toujours assure cette fois que les trois segments en question sont bien concourants, disons en un point P' .

Si P' et P étaient confondus alors, d'après notre construction, le point P serait également l'orthocentre de ABC . Dans ces conditions, les trois hauteurs auraient la même longueur et donc ABC serait équilatéral, ce que l'on a exclu. Donc, $P' \neq P$ et les trois céviennes passant par P' sont bien de même longueur.



³Une céviennne issue de P est une droite qui passe par P et par un sommet du triangle. La longueur de cette céviennne est, par définition, la longueur du « morceau » de cette droite qui se trouve à l'intérieur du triangle.

Corrigé de l'envoi 5 — 2004/2005

Problème 4 :

Soit P un polygone convexe à n côtés. Prouver qu'il n'existe pas plus de $\frac{n(2n-5)}{3}$ triangles d'aire 1 dont les sommets sont des sommets de P .

Notre solution :

Donnons-nous une paire $\{A, B\}$ de sommets du polygone. L'ensemble des points X pour lesquels le triangle ABX est d'aire 1 est une union de deux droites parallèles à (AB) . Or, comme le polygone P est supposé convexe, sur cette union, il y a au plus quatre sommets de P (deux sur chaque droite).

On peut quelque peu raffiner cette majoration : si les points A et B sont deux sommets consécutifs, il ne peut y avoir que deux points (puis une des deux droites est entièrement à l'extérieur du polygone), et si les points A et B sont séparés seulement par un sommet intermédiaire, alors il y a au plus trois points.

Or, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ paires de sommets. Et parmi ceux-ci, il y a en n qui sont formées de deux sommets consécutifs, et également n qui sont formées de deux sommets séparés par un seul sommet. D'autre part, à chaque triangle, il correspond manifestement trois paires de sommets, et donc chaque triangle a été comptabilisé trois fois dans le décompte précédent. Finalement le nombre de triangles d'aire 1 est majoré par :

$$\frac{1}{3} \left[4 \left(\frac{n(n-1)}{2} - 2n \right) + 3n + 2n \right] = \frac{1}{3} [2n(n-1) - 3n] = \frac{n(2n-5)}{3}$$

comme on le demandait.

Corrigé de l'envoi 5 — 2004/2005

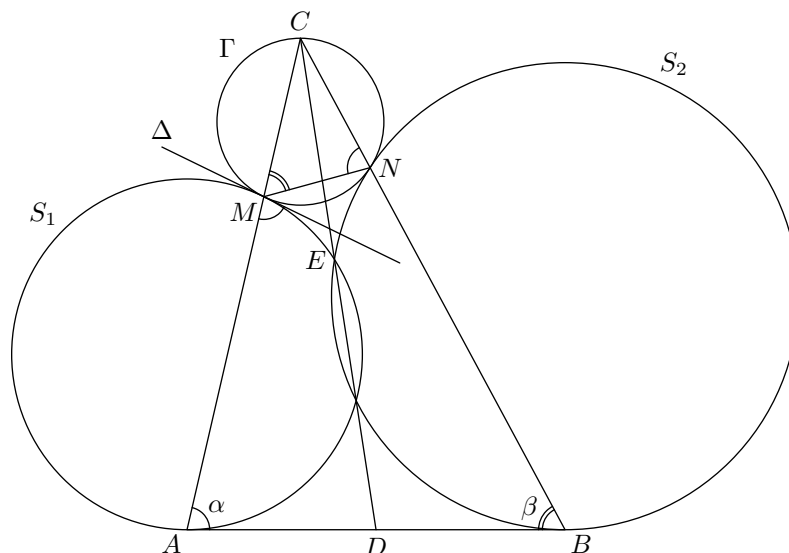
Problème 5 :

Soit ABC un triangle, et D le milieu de $[AB]$. Soit $E \in [CD]$. Le cercle S_1 , passant par E et tangent à la droite (AB) en A , rencontre à nouveau le côté $[AC]$ en M . Le cercle S_2 , passant par E et tangent à la droite (AB) en B , rencontre à nouveau le côté $[BC]$ en N .

Prouver que le cercle circonscrit au triangle CMN est tangent à S_1 et à S_2 .

Notre solution :

Commençons par tracer une figure et profitons-en pour noter $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et Γ le cercle circonscrit au triangle MNC :



On remarque en premier lieu que le point D a même puissance par rapport à S_1 et S_2 puisque $DA = DB$. Ainsi la droite (DE) est l'axe radical⁴ des cercles S_1 et S_2 . Par hypothèse C est un point de cette droite et donc $CM \cdot CA = CN \cdot CB$ d'où il vient :

$$\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CA}$$

Ainsi les triangles CMN et CBA qui ont l'angle \hat{C} en commun sont semblables et $\widehat{CMN} = \beta$.

Les théorèmes sur les angles inscrits donnent des conditions de tangente entre un cercle et une droite, mais pas entre deux cercles. Toutefois, cela n'est pas bien grave : pour contourner le problème, il ne suffit de tracer la droite Δ tangente au cercle S_1 en M , et de montrer que cette droite est tangente à Γ (en M forcément aussi puisque Γ et S_1 s'intersectent en M).

Par les propriétés des angles inscrits, l'angle que fait Δ avec la droite (AC) vaut α . Ainsi l'angle que font les droites Δ et (MN) est $\pi - \alpha - \beta$, c'est-à-dire exactement l'angle en \hat{C} dans le triangle ABC . À nouveau la propriété des angles inscrits assure que Δ est tangente au cercle Γ .

De même, on démontre que Γ et S_2 sont tangents, ce qui termine l'exercice.

⁴On pourra consulter le cours de géométrie sur la page d'Animath : http://www.animath.fr/cours/deho_geo/deho_geo2.html.

Corrigé de l'envoi 5 — 2004/2005

Problème 6 :

Prouver qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels le plus grand nombre premier divisant $n^2 + 1$ est supérieur à $2n$.

Notre solution :

Soit p un nombre premier divisant un nombre de la forme $n^2 + 1$. Alors il divise $m^2 + 1$ pour tout entier m congru à n ou à $-n$ modulo p . Parmi ces entiers, il y en a clairement un, que l'on appelle m à présent, compris entre 0 et $\frac{p}{2}$. Par ailleurs, m ne peut pas valoir $\frac{p}{2}$ si l'on choisit $p > 2$.

L'entier m vérifie la condition de l'énoncé : le nombre premier p divise $m^2 + 1$, donc le plus grand diviseur premier de $m^2 + 1$ est supérieur ou égal à p qui est lui-même strictement supérieur à $2m$.

Ainsi, à partir d'un nombre premier (impair) divisant un entier de la forme $n^2 + 1$, on construit un entier m solution du problème. Il reste à prouver qu'il y a une infinité de nombres premiers divisant un entier de la forme $n^2 + 1$ et que les entiers m construits à partir de ces nombres premiers ne forment pas un ensemble fini.

Commençons par la première assertion et raisonnons pour cela par l'absurde en supposant que les seuls nombres premiers qui divisent les entiers de la forme $n^2 + 1$ sont p_1, \dots, p_k . On obtient alors immédiatement une contradiction en considérant $n = p_1 \cdots p_k$.

Prouvons à présent que le procédé décrit précédemment fournit bien une infinité d'entiers m . On sait que si on part d'un nombre premier p , la recette fournit un entier m tel que p divise $m^2 + 1$. Notons p_0 un nombre premier impair diviseur d'un entier de la forme $n^2 + 1$ et m_0 l'entier qui lui est associé. Il existe manifestement un nombre premier p_1 diviseur d'un entier de la forme $n^2 + 1$, et distinct de tous les diviseurs premiers de $m_0^2 + 1$, puisque la restriction ne rejette qu'un nombre fini de nombres premiers. Alors, l'entier m_1 associé à p_1 est forcément distinct de p_0 . En choisissant p_2 un nombre premier diviseur d'un $n^2 + 1$ et distincts de tous les diviseurs premiers de $m_0^2 + 1$ et de $m_1^2 + 1$, on construit un entier m_2 distinct de m_0 et de m_1 .

Ainsi de suite, on fabrique une suite d'entiers m_n deux à deux distincts et satisfaisant tous la condition de l'énoncé. D'où le résultat.