

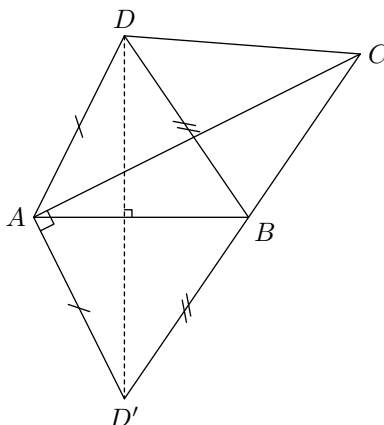
Corrigé de l'envoi 3 — 2004/2005

Problème 1 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{DAB} < \frac{\pi}{2}$, $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{DBC} + 2\widehat{DBA} = \pi$.

Prouver que $(DB + BC)^2 = AD^2 + AC^2$.

Notre solution :



Cette égalité ressemble fort à une application du théorème de Pythagore, encore faut-il trouver un triangle rectangle dans cette figure... Il y a bien une somme d'angles égale à $\frac{\pi}{2}$, mais pas dans un triangle...

Bon, alors faisons apparaître le triangle : la clé est d'arriver à interpréter géométriquement les sommes d'angles données dans l'énoncé pour pouvoir les utiliser dans notre raisonnement. Elles ne semblent pas très pratiques a priori parce qu'elles font intervenir les quatre points et on peut se demander à quoi peut bien servir le facteur 2. Cette dernière relation, signifiant que $\widehat{ABC} + \widehat{DBA} = \pi$, incite à considérer le symétrique D' de D par rapport à (AB) , puisqu'alors :

$$\widehat{D'BA} + \widehat{ABC} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC} = \pi$$

et donc les points D' , B et C sont alignés dans cet ordre. Et justement, la relation $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$ s'écrit aussi :

$$\widehat{AD'C} + \widehat{ACD'} = \frac{\pi}{2}$$

et donc le triangle ACD' est rectangle en A . Le plus dur est fait, puisqu'il suffit maintenant d'utiliser le théorème de Pythagore pour obtenir :

$$(DB + BC)^2 = (D'B + BC)^2 = D'C^2 = D'A^2 + AC^2 = DA^2 + AC^2$$

Corrigé de l'envoi 3 — 2004/2005

Problème 2 :

Soit $n > 1$ un entier. On répartit les entiers strictement supérieurs à 1 en n parties non vides et deux à deux disjoints de sorte que si a et b sont deux éléments quelconques d'une même de ces parties, disons A , tels que $\text{PGCD}(a, b) = d > 1$ alors d appartient lui aussi à A . Prouver qu'une des parties contient tous les nombres premiers sauf, éventuellement, au plus $n - 1$ d'entre eux.

Notre solution :

Soient A_1, \dots, A_n les parties. Puisqu'il y a une infinité de nombres premiers et seulement un nombre fini de parties, l'une de ces parties, disons A_n , contient une infinité de nombres premiers.

Par l'absurde, supposons que les nombres premiers p_1, \dots, p_n soient deux à deux distincts et n'appartiennent pas à A_n . Soient q_1, \dots, q_{n+1} des nombres premiers deux à deux distincts et appartenant à A_n . Pour tout $i < n$, parmi les nombres $q_1 p_1, q_1 p_2, \dots, q_1 p_n$ au plus un appartient à A_i , sans quoi on aurait $q_1 \in A_i$, ce qui contredirait que A_i et A_n sont disjoints. Par conséquent, au moins un des ces nombres est dans A_n .

Pour tout j , on raisonne de la même façon avec les nombres $q_j p_1, q_j p_2, \dots, q_j p_n$, prouvant ainsi qu'au moins l'un d'entre eux est dans A_n . D'après le principe des tiroirs, il existe i, j et k avec $j \neq k$ tels que $q_j p_i$ et $q_k p_i$ appartiennent tous les deux à A_n . Mais alors $p_i \in A_n$. C'est une contradiction.

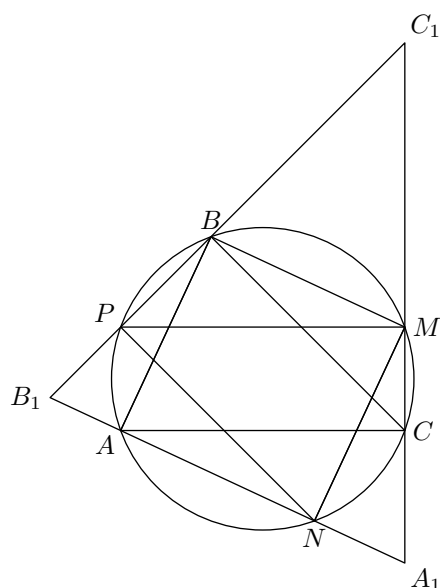
Corrigé de l'envoi 3 — 2004/2005

Problème 3 :

Chaque point appartenant aux côtés d'un triangle acutangle ABC est colorié soit en vert, soit en rouge, soit en bleu. Prouver qu'il existe un triangle rectangle dont les trois sommets sont de la même couleur ou qu'il existe un triangle semblable à ABC dont les trois sommets pris sur les côtés de ABC sont de couleurs deux à deux distinctes.

Notre solution :

Commençons par une construction qui va nous être utile par la suite :



Soit Γ le cercle circonscrit à ABC . Soient M, N, P les points de Γ diamétralement opposés à A, B, C respectivement. Soient également A_1 le point d'intersection des droites (CM) et (AN) , B_1 le point d'intersection des droites (AN) et (BP) , C_1 le point d'intersection des droites (CM) et (BP) . Puisque les droites (AB) et (A_1B_1) sont perpendiculaires, tout comme les droites (A_1C_1) et (AC) ainsi que les droites (BC) et (B_1C_1) , on en déduit facilement que les triangles MNP , ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables. Il suffit donc de prouver le résultat pour le triangle $A_1B_1C_1$ auquel on a reporté la coloration de ABC .

Si l'un des triangles ABC ou MNP a ses trois sommets de couleurs distinctes, le résultat est assuré. On suppose donc que chacun de ces deux triangles possède au moins deux sommets de même couleur. Sans perte de généralité toujours, on peut supposer que A et B sont bleus. Alors :

- ☞ si deux des sommets du triangle MNP sont bleus, alors au moins un des points M ou N est bleu. Par exemple M . Dans ce cas, le triangle AMB est rectangle et inscrit dans $A_1B_1C_1$ et il a ses trois sommets de même couleur, ce qui assure la conclusion ;
- ☞ si deux des sommets de MNP sont verts, disons M et P (les autres cas sont analogues), alors si de plus A_1 est vert ou bleu, l'un des triangles rectangles ABA_1 et MPA_1 a ses trois sommets de même couleur et on conclut à nouveau. Si, par contre, A_1 est rouge alors les points A, M et A_1 sont de couleurs distinctes. Et puisque $\widehat{B_1A_1C_1} = \widehat{AA_1M}$ et $\widehat{MAA_1} = \widehat{MAN} = \widehat{MPN} = \widehat{B_1C_1A_1}$, les triangles A_1MA et $A_1B_1C_1$ sont semblables, ce qui assure encore la conclusion.

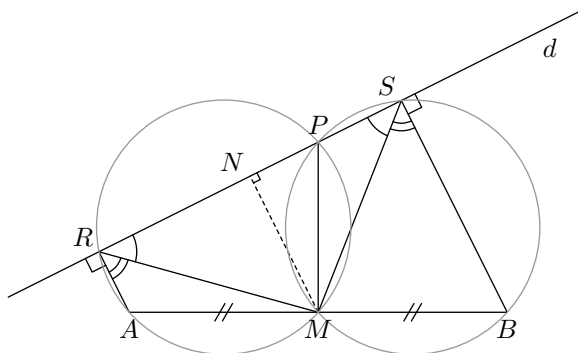
Corrigé de l'envoi 3 — 2004/2005

Problème 4 :

Soient A et B deux points du plan, et M le milieu de $[AB]$. Soit d une droite n'intersectant pas le segment $[AB]$. Soient R et S les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur d . On suppose que les points A , M et R ne sont pas alignés. Prouver que le cercle circonscrit au triangle AMR et le cercle circonscrit au triangle BSM ont le même rayon, et que ces cercles s'intersectent sur la droite d .

Notre solution :

On rappelle que si XYZ est un triangle, le rayon de son cercle circonscrit est donné par $\frac{YZ}{2 \sin \widehat{X}}$. Ainsi, pour prouver l'égalité des rayons, comme ici $AM = MB$ par hypothèse, il suffit de prouver que les angles \widehat{ARM} et \widehat{MSB} sont égaux.



La projection orthogonale conserve les milieux, et donc M se projette orthogonalement sur d en N milieu de $[RS]$. On en déduit que MRS est isocèle puisque sa hauteur est également sa médiane. Mais alors les angles \widehat{MRS} et \widehat{MSR} sont égaux, et donc par suite les angles \widehat{ARM} et \widehat{MSB} le sont aussi comme on le voulait.

Appelons P le point d'intersection des deux cercles circonscrits. Nous voulons montrer que P est un point de la droite d , c'est-à-dire que P , R et S sont alignés. Nous allons pour cela évaluer la somme $\widehat{RPM} + \widehat{MPS}$.

Les points A , M , P et R sont cocycliques et les hypothèses assurent que A et P ne sont pas du même côté de la corde $[MR]$. On en déduit que $\widehat{RAM} + \widehat{RPM} = \pi$. De même, la cocyclicité des points M , P , S et B démontre que $\widehat{MBS} + \widehat{MPS} = \pi$. Ainsi :

$$\widehat{RPM} + \widehat{MPS} = 2\pi - \widehat{RAM} - \widehat{MBS}$$

Mais, par ailleurs, la somme des angles d'un quadrilatère fait toujours 2π . En appliquant cela à $ARSB$, on obtient $\widehat{RAM} + \widehat{MBS} = \pi$, et donc par suite :

$$\widehat{RPM} + \widehat{MPS} = \pi$$

ce qui prouve bien l'alignement, et termine l'exercice.

Corrigé de l'envoi 3 — 2004/2005

Problème 5 :

Déterminer tous les ensembles A et B tels que $A \cup B = \mathbb{Z}$ et qui vérifient les deux conditions suivantes :

- a) Si $x \in A$ alors $x - 1 \in B$;
 - b) Si $x, y \in B$ alors $x + y \in A$.
-

Notre solution :

Montrons tout d'abord que pour tout entier n , les ensembles A et B contiennent tous les deux au moins un entier supérieur à n . On peut pour cela clairement supposer $n \geq 0$. Si n n'appartient pas à A , alors comme $A \cup B = \mathbb{Z}$, il vient $n \in B$. Mais alors par hypothèse $n + n = 2n \in A$. Dans tous les cas, A contient un entier supérieur ou égal à n . De même si $n + 1$ n'appartient pas à B , alors $n + 1 \in A$ et donc $n \in B$. Ainsi, B contient forcément un entier supérieur ou égal à n .

Montrons à présent qu'un des deux entiers (ou les deux) 0 ou 1 est élément de A . En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $0, 1 \in B$ et par la propriété b), il viendrait $0 + 1 = 1 \in A$. C'est une contradiction.

Voyons dans cet alinéa ce qui se passe si $1 \in A$. Dans ce cas, on a $0 \in B$. Ainsi, si $x \in A$, alors $x - 1 \in B$ par la propriété a) et donc $(x - 1) + 0 \in A$. Comme on a montré que A contient des entiers arbitrairement grands, on en déduit que $A = \mathbb{Z}$. Par suite, il vient $B = \mathbb{Z}$ aussi.

Traitons désormais le second cas. On suppose donc $0 \in A$. Alors $-1 \in B$ et comme précédemment, on montre que si $x \in A$, alors $x - 2 \in A$. En fait, on montre plus généralement que si x et y sont dans A , alors il en est de même de $x + y - 2$. En particulier, si $x \in A$, alors $2x - 2 \in A$, et donc du fait que A contient des entiers arbitrairement grands, on déduit que A contient des entiers *pairs* arbitrairement grands. Comme A est stable par l'opération $x \mapsto x - 2$, A contient forcément au moins tous les nombres pairs. Et par l'hypothèse a), B contient tous les nombres impairs.

Supposons qu'un entier $n = 2k + 1$ impair appartienne à A . L'entier $-2k + 2$ est pair et donc élément de A . On en déduit que $(2k + 1) + (-2k + 2) - 2 \in A$, c'est-à-dire $1 \in A$. On a déjà traité ce cas et vu qu'il impliquait que $A = B = \mathbb{Z}$.

Si au contraire, A ne contient aucun entier impair, alors A est exactement l'ensemble des nombres pairs. Si un entier pair $n = 2k$ était élément de B , alors, comme $1 \in B$, on aurait par l'hypothèse b), $2k + 1 \in A$, ce qui est supposé faux.

Finalement, il n'y a que deux solutions :

- ☞ A et B sont tous les deux \mathbb{Z} tout entier ;
- ☞ A est l'ensemble des nombres pairs, et B celui des nombres impairs.

Corrigé de l'envoi 3 — 2004/2005

Problème 6 :

Soit $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(1997) = 1$ et, pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, on ait :

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

Prouver que $f(2005) \leq 1$.

Notre solution :

Soit $n > 0$ un entier. En décomposant n en base 1997, c'est-à-dire en l'écrivant sous la forme :

$$n = a_0 + 1997a_1 + 1997^2a_2 + \cdots + 1997^ka_k$$

pour certains entiers a_i compris entre 0 et 1996, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} f(n) &\leq f(a_0) + f(1997a_1) + \cdots + f(1997^ka_k) \\ &= f(a_0) + f(a_1) + \cdots + f(a_k) \leq M(k + 1) \end{aligned}$$

où M est le plus grand des réels $f(0), f(1), \dots, f(1996)$.

D'autre part, on peut toujours choisir $k \leq \frac{\log n}{\log 1997}$. Ainsi on a pour tout entier $n > 0$:

$$f(n) \leq M \left(\frac{\log n}{\log 1997} + 1 \right)$$

Posons $\alpha = f(2005)$. La propriété de multiplicativité nous donne $f(2005^k) = \alpha^k$ et donc la majoration précédente fournit :

$$\alpha^k \leq M \left(\frac{\log 2005}{\log 1997} k + 1 \right)$$

et ce pour tout entier k . Si $\alpha > 1$, la fonction $k \mapsto \alpha^k$ a une croissance exponentielle, et donc elle ne peut demeurer inférieure à la fonction affine $k \mapsto M \left(\frac{\log 2005}{\log 1997} k + 1 \right)$. On en déduit que $\alpha \leq 1$, ce qui résout l'exercice.