

## Corrigé de l'envoi 1 — 2004 / 2005

### Problème 1 :

Sur un damier  $n \times n$  formé exclusivement de cases blanches, on dit que deux cases sont adjacentes si elles ont tout un côté en commun. Dolphi et Cleo jouent au jeu suivant. Dolphi commence par noircir la case en haut à gauche. Cleo doit alors noircir une case non encore noircie et adjacente à celle que vient de noircir Dolphi. Puis c'est au tour de Dolphi de jouer, et de noircir une case blanche adjacente à la case précédemment noircie (par Cleo) et ainsi de suite. Lorsqu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.

Déterminer, selon les valeurs de  $n$ , lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

---

### Notre solution :

Après quelques essais pour les petites valeurs de  $n$ , il semble que si  $n$  est impair alors Dolphi, qui joue en premier possède une stratégie gagnante. Et que si  $n$  est pair alors Cleo, qui joue en seconde, possède une stratégie gagnante. Et effectivement, c'est le cas. Comme souvent dans les questions de parité sur un damier, il s'agit de trouver un bon invariant. Et lorsqu'il est question de stratégie gagnante, de trouver une façon de jouer qui force celle de son adversaire.

Ici, la clé est de paver le damier par des dominos. C'est évidemment possible lorsque  $n$  est pair, et il est clair qu'un domino recouvre deux cases adjacentes. Choisissons un tel pavage que l'on fixe une fois pour toutes. La stratégie de Cleo est alors très simple : elle « complète » à chaque fois le domino que vient juste de colorier Dolphi. Ainsi, à son premier coup, elle colorie la case qui forme un domino avec la case en haut à gauche. Dolphi est alors obligé de noircir une case d'un domino non encore utilisé, ce qui laisse à Cleo la possibilité de compléter à nouveau le domino à son coup d'après. Et ainsi, une récurrence évidente prouve que Cleo peut obliger Dolphi à « ouvrir » un domino, pour autant qu'il puisse jouer, qu'elle-même complétera au coup suivant. Du coup, si Dolphi peut jouer alors Cleo le peut également au tour d'après. Cela assure que c'est Dolphi qui se retrouvera bloqué le premier et donne donc bien la victoire à Cleo.

Lorsque  $n$  est impair, il suffit à Dolphi de choisir au préalable un pavage du damier privé de la case en haut à gauche (il est assez évident qu'un tel pavage existe). Il n'a plus qu'à suivre la stratégie décrite ci-dessus pour assurer sa victoire.

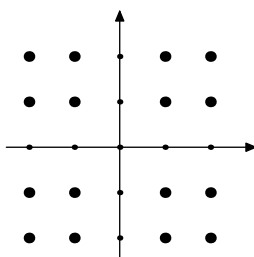
## Corrigé de l'envoi 1 — 2004 / 2005

### Problème 2 :

On considère l'ensemble  $E$  des points  $M(x, y)$  du plan, avec  $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Déterminer le plus petit entier  $k$  pour lequel l'affirmation suivante est vraie : tout sous-ensemble de  $E$  contenant au moins  $k$  éléments en contient trois dont un est le milieu des deux autres.

### Notre solution :

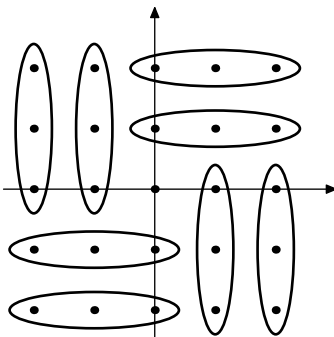
On vérifie facilement que si l'on choisit les 16 points comme le montre la figure ci-dessous :



aucun n'est le milieu de deux autres d'entre eux. Cela assure que  $k \geq 17$ .

Considérons maintenant un ensemble  $A$  quelconque de 17 points (évidemment, s'il en a plus, c'est encore plus facile). On voudrait prouver que l'un est le milieu de deux des autres. Cela fait immédiatement penser au principe des tiroirs. L'idée est donc de répartir les points en triplets tels que dans chaque triplet l'un soit le milieu des deux autres. Mais il y a 25 points en tout, ce qui est un peu gênant pour former des triplets... Cela dit, parmi ces 25 points, le point  $O(0, 0)$  joue un rôle un peu particulier dans la mesure où il est le milieu de pas mal de segments. Après avoir noté que seuls 8 points n'appartiennent pas à  $A$ , on distingue donc deux cas :

- ☞ Si  $O \in A$ , alors, parmi les 10 paires de points  $M(x; y), P(-x; -y)$  où  $y > 0$ , l'une au moins est entièrement contenu dans  $A$ , et elle a  $O$  comme milieu. Cela conclut dans ce cas.
- ☞ Si  $O \notin A$ , on a encore 17 points à répartir parmi les huit « boîtes » dessinées ci-dessous :



Il est impossible que chaque boîte contienne au plus deux points, c'est donc qu'une en contient trois, *i.e.* est complètement remplie. Cela assure directement la conclusion.

Et ainsi  $k \leq 17$ . Finalement, le minimum cherché est 17.

## Corrigé de l'envoi 1 — 2004 / 2005

### Problème 3 :

Déterminer tous les nombres premiers  $p$  et  $q$  tels que  $2^p + 2^q$  soit divisible par  $pq$ .

---

### Notre solution :

Supposons que  $p$  et  $q$  soient des nombres premiers tels que  $pq$  divise  $2^p + 2^q$ . Alors en particulier  $p$  divise  $2^p + 2^q$ , ou si l'on préfère :

$$2^p + 2^q \equiv 0 \pmod{p}$$

D'après le petit théorème de Fermat, on a  $2^p \equiv 2 \pmod{p}$  et donc la condition précédente se réécrit  $2^q \equiv -2 \pmod{p}$ . Si  $p$  est impair, ce que nous supposons à partir de maintenant, on peut simplifier par 2 pour obtenir  $2^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}$ .

Notons  $k$  l'ordre de 2 modulo  $p$ , c'est-à-dire le plus petit entier  $k > 0$  tel que  $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ . Alors les entiers  $n$  qui vérifient  $2^n \equiv 1 \pmod{p}$  sont exactement les multiples de  $k$ . En particulier  $2q - 2$  est un multiple de  $k$  et on peut écrire  $2q - 2 = kk'$  pour un certain entier  $k'$ .

Prouvons à présent que  $k'$  est impair. Si ce n'était pas le cas,  $q - 1$  serait lui aussi un multiple de  $k$ , et donc on devrait avoir  $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , mais cela n'est pas le cas par hypothèse. Donc  $k'$  est impair.

Si  $n$  est un entier, notons  $v_2(n)$  le plus grand exposant  $e$  tel que  $2^e$  divise  $n$  (note<sup>1</sup> : cet exposant s'appelle la *valuation 2-adique* de  $n$ , et c'est celui qui apparaît sur l'exposant 2 dans la décomposition en facteurs premiers de  $n$ ). L'égalité  $2q - 2 = kk'$  et le fait que  $k'$  soit impair prouvent que  $v_2(2q - 2) = v_2(k)$  ou encore  $v_2(q - 1) = v_2(k) - 1$ . Par ailleurs, on sait que  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  par le petit théorème de Fermat et donc  $p - 1$  est un multiple de  $k$ . On en déduit que  $v_2(p - 1) \geq v_2(k)$  et donc en regroupant tout, il vient :

$$v_2(q - 1) \leq v_2(p - 1) - 1$$

toujours sous l'hypothèse  $p$  impair, rappelons-le.

Si maintenant, on suppose de plus que  $q$  est impair, on peut faire le même raisonnement en intervertissant les rôles de  $p$  et de  $q$ , obtenant ainsi :

$$v_2(p - 1) \leq v_2(q - 1) - 1$$

et il est flagrant que les deux inégalités précédentes sont en contradiction.

On en déduit que si  $p$  et  $q$  sont solutions, alors un des deux nombres  $p$  ou  $q$  est pair, c'est-à-dire égal à 2 puisqu'il est premier. Supposons par exemple que ce soit  $p$ . La condition s'écrit alors  $2q$  divise  $4 + 2^q$ . Mais encore d'après le petit théorème de Fermat,  $q$  divise  $2^q - 2$ , et donc  $q$  doit diviser  $(4 + 2^q) - (2^q - 2) = 6$ . Ainsi  $q = 2$  ou  $q = 3$ . On vérifie ensuite que ces deux possibilités conviennent.

Finalement il y a trois solutions qui sont  $(p, q) = (2, 2)$ ,  $(p, q) = (2, 3)$  et  $(p, q) = (3, 2)$ .

---

<sup>1</sup>Pour plus d'indications, il est possible de consulter le poly d'arithmétique disponible sur la page d'Animath : <http://www.animath.fr/cours/arithm.pdf> ou <http://www.animath.fr/cours/arithm.ps.gz>.

## Corrigé de l'envoi 1 — 2004 / 2005

### Problème 4 :

On place un certain nombre de balles colorées dans des boîtes. Il y a au moins trois boîtes, et au moins trois couleurs (une balle n'est colorée que d'une seule couleur). On sait qu'aucune boîte n'est vide et que trois balles de couleurs deux à deux distinctes ne sont jamais dans trois boîtes différentes. Prouver qu'il existe une boîte  $B$  telle que les balles qui ne sont pas dans  $B$  soient toutes de la même couleur.

---

### Notre solution :

Les hypothèses assurent qu'il y a au moins une boîte  $B$  qui contient des balles de deux couleurs différentes.

Supposons que les couleurs *rouge*, *vert* soient représentées dans la boîte  $B$ , et qu'une troisième couleur représentée est *bleu*. On distingue deux cas :

☞  $B$  ne contient pas de balle bleue. Il existe une boîte  $B'$  qui contient une balle bleue. Alors il est impossible d'après l'hypothèse qu'une boîte distincte de  $B$  et de  $B'$  contienne une balle qui n'est pas bleue (car sinon, on aurait une balle bleue dans  $B'$ , une balle non-bleue dans cette autre boîte, et une balle d'une troisième couleur — rouge ou verte selon le cas — dans  $B$ ).

Ainsi toutes les balles qui ne sont pas dans  $B$ , ni dans  $B'$  sont bleues. D'autre part, on sait qu'il y a au moins trois boîtes, donc une troisième boîte  $B''$ . Elle contient au moins une balle qui d'après ce qui précède est bleue. On peut donc refaire le raisonnement précédent en remplaçant  $B'$  par  $B''$ , et ainsi prouver que toutes les balles de  $B'$  sont également bleues.

On a donc terminé l'exercice dans ce cas

☞  $B$  contient une balle bleue. Soit  $B'$  une boîte différente de  $B$ . Elle contient au moins une balle  $b$ . Le raisonnement précédent s'applique alors mot pour mot (en remplaçant éventuellement « rouge » et « vert » par deux couleurs, parmi *rouge*, *vert* et *bleu*, qui sont différentes de la couleur de  $b$ ), et démontre que toutes les balles qui ne sont pas dans  $B$  sont de la couleur de la balle  $b$ .

## Corrigé de l'envoi 1 — 2004 / 2005

### Problème 5 :

Déterminer tous les polynômes  $P$  à coefficients réels tels que :

$$P(a + b + c) = 7P(a) - 5P(c) + 4P(b)$$

pour tous réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $(a + b)(b + c)(c + a) = 2a^3 + b^3 - 2c^3$ .

---

### Notre solution :

La condition portant sur les variables étant un peu étrange, on commence par chercher un triplet de réels  $(a, b, c)$  qui pourraient bien la vérifier (et évidemment autre que le triplet  $(0, 0, 0)$  qui ne va pas nous avancer beaucoup). On note au passage que la condition est homogène et donc que si  $(a, b, c)$  convient, il en est de même de  $(ka, kb, kc)$  pour tout réel  $k$ . Après un peu de recherche donc, on constate que le triplet  $(3x, 2x, x)$  vérifie la condition pour tout réel  $x$ . Les solutions vérifient donc l'égalité polynomiale :

$$P(6x) = 7P(3x) - 5P(x) + 4P(2x) \tag{1}$$

Supposons que  $P$  soit une solution au problème posé, autre que le polynôme nul (qui est clairement solution). On remarque que pour  $x = 0$ , la relation (1) conduit à  $P(0) = 0$ , ce qui assure que le coefficient constant de  $P$  est nul. Soit  $n$  le degré de  $P$ . En identifiant les coefficients de  $x^k$  dans (1) pour  $k = 1, \dots, n$ , il vient :

$$6^k = 7 \times 3^k - 5 + 4 \times 2^k$$

pour tout  $k$  tel que le coefficient de  $x^k$  dans  $P$  est non nul.

On peut prévoir que cette relation ne va pas être vérifiée bien souvent... Et on vérifie facilement que si  $k \geq 4$ , alors  $7 < 2^{k-1}$  et  $4 < \frac{3^k}{2}$ . On en déduit que pour  $k \geq 4$  :

$$6^k > 7 \times 3^k - 5 + 4 \times 2^k$$

et donc qu'il n'y a pas égalité. En réalité, seul  $k = 3$  convient. On en déduit que  $P$  est de degré 3 et même de la forme  $P(x) = \lambda x^3$  pour un certain réel  $\lambda$  non nul.

Réciproquement, on vérifie facilement que ces polynômes sont bien des solutions du problème initial (ce n'est pas très rigolo, mais bon).

Finalement, les polynômes solutions sont ceux de la forme  $P(x) = \lambda x^3$  où  $\lambda$  est une constante réelle.

## Corrigé de l'envoi 1 — 2004 / 2005

### Problème 6 :

Soit  $ABC$  un triangle et  $M$  le milieu de  $[BC]$ . La bissectrice intérieure de  $\hat{A}$  rencontre  $[BC]$  en  $N$ . La droite perpendiculaire à  $(AN)$  en  $N$  rencontre respectivement  $(MA)$  en  $Q$ , et  $(BA)$  en  $P$ . La perpendiculaire à  $(AB)$  en  $P$  rencontre  $(AN)$  en  $O$ . Prouver que les droites  $(OQ)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

### Notre solution :

Soit  $\Delta$  la perpendiculaire à  $(OQ)$  passant par  $Q$ . Elle rencontre  $(AB)$  en  $B'$  et  $(AC)$  en  $C'$ . On va prouver que les droites  $(BC)$  et  $(B'C') = \Delta$  sont parallèles, ce qui assurera la conclusion désirée.

Soit  $R$  le symétrique de  $P$  par rapport à  $(OA)$ . Cette symétrie envoie la droite  $(AB)$  sur la droite  $(AC)$  et donc  $R$  se situe à l'intersection de  $(PQ)$  et de  $(AC)$  et l'angle  $\widehat{ORC}$  est droit. D'autre part, le triangle  $OPR$  est isocèle en  $O$ . Puisque les points  $P, N, Q$  et  $R$  sont alignés, il vient  $\widehat{OPQ} = \widehat{QRO}$ . Comme, de plus, on a  $\widehat{OPB'} = \frac{\pi}{2} = \widehat{B'QO}$ , les points  $O, P, B'$  et  $Q$  sont cocycliques, et donc  $\widehat{OPQ} = \widehat{OB'Q}$ .

On prouve de la même façon que  $\widehat{QRO} = \widehat{QC'O}$ . Par suite  $\widehat{OB'Q} = \widehat{QC'O}$  et donc le triangle  $OB'C'$  est isocèle en  $O$ . Cela entraîne  $B'Q = QC'$ .

Supposons maintenant que  $(BC)$  et  $(B'C')$  ne soient pas parallèles. La parallèle à  $(BC)$  passant par  $Q$  intersecte alors  $(AB)$  en  $B_1$  et  $(AC)$  en  $C_1$ , où  $Q$  est le milieu de  $[B_1C_1]$ . Mais dans ces conditions,  $B'B_1C'C_1$  est un parallélogramme, et donc les droites  $(AB) = (B'B_1)$  et  $(C'C_1) = (AC)$  sont parallèles, ce qui est absurde.

