

Corrigé de l'envoi ω — 2003 / 2004

Problème 1 :

Déterminer tous les couples (a, b) de réels positifs ou nuls pour lesquels il n'existe qu'une seule fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(f(x)) + f(x) = ax + b$$

Notre solution :

Pour trouver des conditions nécessaires sur a et b , cherchons des solutions à l'équation fonctionnelle sous la forme $f : x \mapsto mx + p$. Il vient, pour tout x :

$$(m(mx + p) + p) + mx + p = ax + b$$

donc $m^2 + m - a = 0$ et $(m + 2)p = b$. Comme $a \geq 0$, on a $1 + 4a > 0$ et l'équation en m possède deux solutions réelles distinctes, et chacune de ces solutions fournit une solution correspondante $b/(m + 2)$ pour p , sauf si l'une des deux valeurs de m est exactement -2 . Pour que l'équation fonctionnelle n'ait pas plus d'une solution continue, on doit donc avoir $a = (-2)^2 + (-2) = 2$.

Si l'on avait de plus $b = 0$, alors toutes les fonctions $f : x \mapsto -2x + p$ pour p réel quelconque seraient solutions, donc nécessairement $b > 0$. Alors la seule solution affine à l'équation fonctionnelle correspond à l'autre valeur de m , donnée par $-2m = -2$, soit $m = 1$, et $p = b/(m + 2) = b/3$.

On va voir que réciproquement, pour $a = 2$ et $b > 0$, $x \mapsto x + b/3$ est la seule solution continue à l'équation fonctionnelle. En effet, soit f une telle solution. On remarque que f n'a pas de point fixe, car si l'on avait $f(x) = x$ pour un certain réel x , il viendrait $2x + b = f(f(x)) + f(x) = f(x) + x = 2x$, ce qui est impossible. La continuité de f assure donc que $f(x) > x$ pour tout x ou $f(x) < x$ pour tout x . La fonction g définie par :

$$g(x) = f(x) - x - b/3$$

est donc minorée ou majorée selon le cas. Cependant, pour tout x , on a :

$$g(f(x)) = f(f(x)) - f(x) - b/3 = 2x + b - 2f(x) - b/3 = -2g(x)$$

et donc en itérant f , il vient $g(f^n(x)) = (-2)^n g(x)$. Comme g est majorée ou minorée, cela impose $g(x) = 0$ pour tout x .

Finalement, les couples (a, b) de réels positifs pour lesquels l'équation fonctionnelle $f(f(x)) + f(x) = ax + b$ possède une unique solution f continue sont les couples $(2, b)$ avec $b > 0$, et l'unique fonction f qui convient est alors donnée par $f(x) = x + b/3$.

Corrigé de l'envoi ω — 2003 / 2004

Problème 2 :

Soit n un entier ≥ 1 , et x_1, \dots, x_n des réels. Montrer que l'on a :

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}$$

Notre solution :

Pour tous réels a_1, \dots, a_n , l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que :

$$a_1 + \dots + a_n \leq \sqrt{n} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

En prenant $a_k = x_k / (1 + x_1^2 + \dots + x_k^2)$, on est donc ramené à montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\dots+x_k^2} \right)^2 < 1$$

Or pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\dots+x_k^2} \right)^2 &= \frac{x_k^2}{(1+x_1^2+\dots+x_k^2)^2} \\ &\leq \frac{x_k^2}{(1+x_1^2+\dots+x_{k-1}^2)(1+x_1^2+\dots+x_k^2)} \\ &= \frac{1}{1+x_1^2+\dots+x_{k-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+\dots+x_k^2} \end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, on voit que les seconds membres se télescopent, et l'on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\dots+x_k^2} \right)^2 \leq 1 - \frac{1}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} < 1$$

ce qui conclut.

Corrigé de l'envoi ω — 2003 / 2004

Problème 3 :

Soit E un ensemble à n éléments, et A_1, \dots, A_k des parties de E de cardinal impair. On suppose de plus que pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j$ est de cardinal pair. Prouver que $k \leq n$.

Notre solution :

On va montrer successivement les deux lemmes suivants.¹ Le résultat demandé en découle de manière immédiate.

Lemme 1. *Soit J une partie non vide de $I = \{1, \dots, k\}$. Il existe un élément x dans E tel que $\{j \in J / x \in A_j\}$ soit de cardinal impair.*

Lemme 2. *Soit B_1, \dots, B_k des parties quelconques (éventuellement confondues) de E . Si $k > n$, alors il existe une partie non vide J de $I = \{1, \dots, k\}$ telle que tous les ensembles $\{j \in J / x \in B_j\}$ soient de cardinal pair.*

Pour le premier lemme, on raisonne par l'absurde en supposant que les ensembles $U_x = \{j \in J / x \in A_j\}$ pour tout x sont de cardinal pair. En effet, soit $j_0 \in J$ fixé (J est supposé non vide). On considère l'ensemble :

$$V_x = \{j \in J / x \in A_j \cap A_{j_0}\}$$

C'est l'intersection de U_x et de $\{j \in J / x \in A_{j_0}\}$. Ce dernier ensemble est J tout entier ou l'ensemble vide selon que x est ou non dans A_{j_0} , donc V_x est ou bien U_x ou bien vide. Dans tous les cas, il est de cardinal pair. On regarde ensuite l'ensemble :

$$V = \{(x, j) \in E \times J / x \in A_j \cap A_{j_0}\}$$

et l'on évalue de deux façons la parité de son cardinal. Pour chaque x , l'ensemble des j tels que (x, j) est dans V est V_x : il en résulte que V est de cardinal pair. À l'inverse, à j fixé, l'ensemble des x tels que (x, j) est dans V est $A_j \cap A_{j_0}$, qui par hypothèse est de cardinal pair pour tout $j \neq j_0$, et de cardinal impair quand $j = j_0$, d'où l'on tire que V est de cardinal impair, ce qui est la contradiction recherchée.

Pour le second lemme, on procède par récurrence sur n . C'est immédiat pour $n = 0$. Supposons donc le résultat au rang n , et soit $E = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ et B_1, \dots, B_k une familles de $k > n + 1$ parties de E . On pose alors $E' = \{x_1, \dots, x_n\}$, et $B'_j = B_j \cap E'$ pour tout j . L'hypothèse de récurrence assure qu'il existe des ensembles J_1 et J_2 respectivement inclus dans $\{1, \dots, n + 1\}$ et $\{2, \dots, n + 2\}$ tels que pour tout $x \in E'$, les ensembles $\{j \in J_i / x \in B'_j\}$, $i = 1, 2$, soient de cardinal pair. Mais si x est dans E' , on a déjà :

$$\{j \in J_i / x \in B'_j\} = \{j \in J_i / x \in B_j\} \quad (i = 1, 2)$$

Par conséquent, si l'un des deux ensembles $\{j \in J_1 / x_{n+1} \in B_j\}$ et $\{j \in J_2 / x_{n+1} \in B_j\}$ est de cardinal pair, on a gagné. Sinon, ils sont tous les deux de cardinal impair, et l'on note $J = J_1 \Delta J_2$ la différence symétrique de J_1 et J_2 . Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$\{j \in J / x \in B_j\} = \{j \in J_1 / x \in B_j\} \Delta \{j \in J_2 / x \in B_j\}$$

¹Notons que cette démonstration apparaît naturellement dans un cadre un peu plus conceptuel qu'on pourra découvrir dans l'article suivant, à paraître dans la *Revue de mathématiques de l'enseignement supérieur* : BORNSTEIN P. ET CARUSO X., Des formes bilinéaires en combinatoire, 2003.

et les deux ensembles du second membre ont des cardinaux de même parité, donc leur différence symétrique est de cardinal pair, et ainsi J convient. Cela achève la récurrence, et donc la démonstration.

Corrigé de l'envoi ω — 2003 / 2004

Problème 4 :

Trouver tous les entiers $n \geq 1$ pour lesquels il existe un entier m tel que $2^n - 1$ divise $m^2 + 9$.

Notre solution :

Montrons tout d'abord que n doit être une puissance de 2. En effet, supposons par l'absurde qu'un n autre qu'une puissance de 2 convienne, et soit m un entier tel que $2^n - 1$ divise $m^2 + 9$. n possède un diviseur impair $\ell \geq 3$, et comme $2^\ell - 1$ divise $2^n - 1$, on a aussi $m^2 \equiv -9 \pmod{2^\ell - 1}$. Or $2^\ell - 1 \equiv -1 \pmod{4}$, donc $2^\ell - 1$ possède un diviseur premier $p \equiv -1 \pmod{4}$. Si $p \neq 3$, on a, d'après le petit théorème de Fermat :

$$1 \equiv m^{p-1} \equiv (m^2)^{(p-1)/2} \equiv (-9)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2} 3^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$$

ce qui est absurde. Et si $p = 3$, $2^\ell \equiv (-1)^\ell \not\equiv 1 \pmod{3}$, d'où encore une contradiction.

Si n est solution, il doit donc être une puissance de 2. On va voir qu'en fait, la réciproque est vraie. Soit $n = 2^k$. On a :

$$2^n - 1 = 3(2^2 + 1)(2^{2^2} + 1) \cdots (2^{2^{k-1}} + 1)$$

Or les $2^{2^\ell} + 1$ pour $\ell = 0, \dots, k-1$ sont deux à deux premiers entre eux. En effet, si $a > b$, soit d le PGCD de $2^{2^a} + 1$ et $2^{2^b} + 1$. d est impair, et l'on a :

$$-1 \equiv 2^{2^a} \equiv \left(2^{2^b}\right)^{2^{b-a}} \equiv 1 \pmod{d}$$

donc $d = 1$. D'après le théorème chinois, il existe donc un entier c tel que l'on ait :

$$c \equiv 2^{2^{\ell-1}} \pmod{2^\ell - 1}$$

pour $\ell = 1, \dots, k-1$. Alors $2^\ell - 1$ divise $c^2 + 1$ pour $\ell = 1, \dots, k-1$, et donc $2^n - 1$ divise $(3c)^2 + 9$.

Finalement, les entiers cherchés sont exactement les puissances de 2.

Corrigé de l'envoi ω — 2003 / 2004

Problème 5 :

On considère le jeu suivant, qui se déroule en deux étapes. On commence par disposer, sur le plan rapporté à un repère orthonormé, un nombre fini de jetons en des points à coordonnées entières et d'ordonnées positives ou nulles. On déplace ensuite les jetons sur la grille des points à coordonnées entières (pas nécessairement positives) comme aux dames : on a simplement le droit de faire sauter un jeton par-dessus un autre qui lui est adjacent (horizontalement ou verticalement), en retirant le jeton ainsi sauté, si la position d'arrivée n'est pas déjà occupée.

Lorsque l'on ne peut plus jouer, on regarde l'ordonnée du jeton situé le plus bas. Montrer que cette ordonnée est minorée indépendamment du nombre de jetons, de la configuration initiale et des déplacements effectués, et donner le minimum que l'on peut trouver.

Notre solution :

Soit φ le nombre d'or, i.e. la racine positive de $X^2 - X - 1$. On attribue au point (x, y) de la grille le poids $\varphi^{-|x|-y}$, et on appelle poids d'une configuration des jetons la somme des poids des points de la grille où se trouvent les différents jetons. Alors la suite des poids des configurations successives au cours du jeu est décroissante.

En effet, une étape du jeu consiste à remplacer les jetons deux jetons aux positions (x, y) et $(x + 1, y)$ par un jeton en $(x + 2, y)$ ou en $(x - 1, y)$, ou bien à remplacer deux jetons en (x, y) et $(x, y + 1)$ par un jeton en $(x, y + 2)$ ou en $(x, y - 1)$. La relation $\varphi^2 = \varphi + 1$ assure alors que le poids de la nouvelle configuration n'est pas plus grand que celui de l'ancienne. L'augmentation la plus grande possible du poids se produit en effet quand on remplace (x, y) et $(x, y + 1)$ par $(x, y - 1)$, et elle vaut :

$$-\varphi^{-|x|-y} - \varphi^{-|x|-(y+1)} + \varphi^{-|x|-(y-1)} = \varphi^{-|x|-y-1}(-\varphi - 1 + \varphi^2) = 0$$

Majorons par ailleurs le poids de la configuration initiale. Il suffit pour cela de calculer le poids total M du demi-plan supérieur, qui vaut :

$$M = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{N}} \varphi^{-|x|-y} = \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} \varphi^{-|x|} \right) \left(\sum_{y \in \mathbb{Z}} \varphi^{-y} \right) = (2S - 1)S$$

où l'on a noté $S = 1 + \varphi^{-1} + \varphi^{-2} + \dots = 1/(1 - \varphi^{-1})$. Ainsi $S = \varphi^2$ et $2S - 1 = \varphi^2 + \varphi^2 - 1 = \varphi^2 + \varphi = \varphi^3$, donc $M = \varphi^5$. Comme la configuration initiale est constituée d'un nombre fini de jetons du demi-plan supérieur, elle est donc strictement inférieure à φ^5 .

La décroissance des poids des configurations successives assure alors que le poids de la configuration finale est strictement inférieur à φ^5 , et donc que tout jeton de cette configuration est situé en un point (x, y) tel que $\varphi^{-|x|-y} < \varphi^5$. Le jeton le plus bas ne peut donc pas être situé en $(0, y)$ pour $y \leq -5$. Comme le problème a une symétrie de translation par rapport à Ox , quitte à translater la configuration initiale, il en résulte qu'aucun jeton ne peut atteindre une ordonnée inférieure ou égale à -5 . Ainsi, l'ordonnée du jeton le plus bas est nécessairement au moins égale à -4 , indépendamment de la configuration initiale et de la succession des coups.

Et -4 est bien le minimum recherché. C'est en effet une valeur effectivement atteinte. On peut par exemple l'obtenir à partir de la configuration initiale constituée de 24 jetons placés en $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ et aux points symétriques par rapport à Oy , $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-3, 0)$, $(-3, 1)$, $(-3, 2)$, $(-3, 3)$, $(-4, 0)$ et $(-4, 1)$.

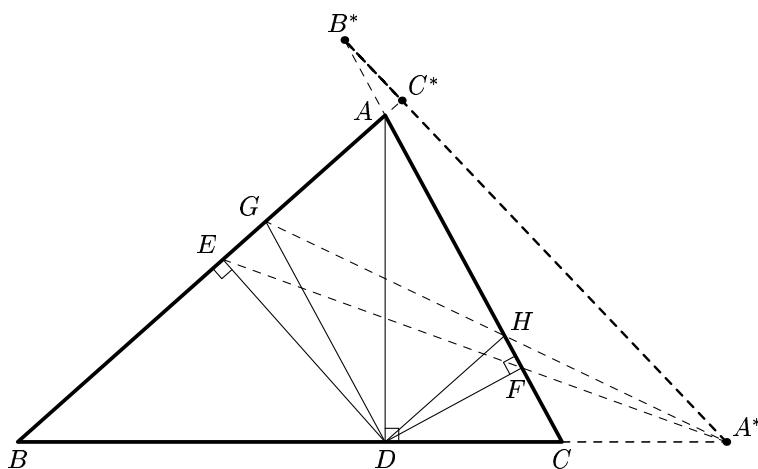
Corrigé de l'envoi ω — 2003 / 2004

Problème 6 :

Soit D le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC . On note E et F les projetés orthogonaux de D sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. De plus, la parallèle à (AC) (resp. (AB)) passant par D rencontre le côté $[AB]$ (resp. $[AC]$) en G (resp. H).

- (a) Montrer que les droites (EF) , (GH) et (BC) sont concourantes en un point noté A^* .
 (b) On définit B^* et C^* de manière analogue. Montrer que les points A^* , B^* et C^* sont alignés.

Notre solution :



- (a) Comme le triangle ABD est rectangle en D , et que E est le pied de la hauteur issue de D dans ce triangle, on a :

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD^2}{BD^2}$$

De la même manière, en considérant le triangle ACD , il vient :

$$\frac{CF}{FA} = \frac{CD^2}{AD^2}$$

Définissons alors A^* comme le point d'intersection de (BC) et (EF) . Le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle ABC et aux points alignés E, F, A^* , donne :

$$1 = \frac{BA^*}{CA^*} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AE}{EB} = \frac{BA^*}{CA^*} \cdot \frac{CD^2}{AD^2} \cdot \frac{AD^2}{BD^2}$$

Par conséquent :

$$\frac{BA^*}{CA^*} = \frac{BD^2}{CD^2}$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Thalès dans ABC , on a :

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AG}{GB} = \frac{CH}{HA}$$

Il vient donc :

$$\frac{BA^*}{CA^*} \cdot \frac{CH}{AH} \cdot \frac{AG}{BG} = \frac{BD^2}{CD^2} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$$

et ainsi, d'après la réciproque du théorème de Ménélaüs pour le triangle ABC , il vient que A^*, H et G sont alignés, ce qui montre bien que A^* est sur les trois droites (BC) , (EF) et (GH) .

(b) Dans le triangle ABC , notons P et R les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. De la même façon que l'on a montré $BA^*/CA^* = BD^2/CD^2$, il vient $CB^*/AB^* = CP^2/AP^2$ et $AC^*/BC^* = AR^2/BR^2$. Or le théorème de Ceva appliqué à D , P et R donne :

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

On obtient donc :

$$\frac{BA^*}{CA^*} \cdot \frac{CB^*}{AB^*} \cdot \frac{AC^*}{BC^*} = \left(\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AR}{RB} \right)^2 = 1$$

d'où il résulte bien, d'après la réciproque du théorème de Ménélaüs, que A^* , B^* et C^* sont alignés.