Corrigé de l'envoi 6 — 2003 / 2004

Problème 1 :

On se donne 18 points du plan, trois jamais alignés, de sorte qu'ils forment 816 triangles. Soit A la somme des aires de ces triangles. On colorie six des points en rouge, six autres en vert et les six derniers en bleu. Montrer que la somme des aires des triangles dont les trois sommets sont de la même couleur ne dépasse pas $A/4$.

Notre solution :

Notons A_1 la somme des aires des triangles dont les trois sommets sont de la même couleur (monochromatiques), et A_2 celle des triangles à deux couleurs (dichromatiques). On peut remarquer que si l'on considère un triangle monochromatique quelconque ABC et un point M d'une autre couleur que ABC, les triangles MAB, MBC et MCA recouvrent ABC, de sorte que :

$$\text{Aire}(ABC) \leqslant \text{Aire}(MAB) + \text{Aire}(MBC) + \text{Aire}(MCA)$$

Supposons, par exemple, que M soit un point vert ou bleu fixé et que l'on regarde l'ensemble des inégalités précédentes avec ABC variant parmi tous les triangles rouges. Un triangle MAB donné intervient dans exactement 4 telles inégalités, car il y a quatre points rouges C distincts que A et B que l'on peut choisir comme troisième sommet. Par conséquent, en sommant toutes ces inégalités, il vient, en notant A_{RRR} la somme des aires des triangles monochromes rouges :

$$A_{RRR} \leqslant 4 \sum_{\{A,B\} \text{ rouges}} \text{Aire}(MAB)$$

On a une telle inégalité pour chacun des douze points M verts ou bleus, donc en additionnant, il vient ensuite, avec des notations évidentes :

$$12A_{RRR} \leqslant 4(A_{RRV} + A_{RRB})$$

En simplifiant par 4 et en additionnant les inégalités analogues pour les couleurs vertes et bleues, il vient enfin :

$$3A_1 = 3A_{RRR} + 3A_{VVV} + 3A_{BBB} \leqslant (A_{RRV} + A_{RRB}) + (A_{VVB} + A_{VVR}) + (A_{BBR} + A_{BBV}) = A_2$$

et ainsi :

$$4A_1 \leqslant A_1 + A_2 \leqslant A$$

ce qui conclut.

Corrigé de l'envoi 6 — 2003 / 2004

Problème 2 :

Soit D un disque ouvert de rayon $R > 1$. Soit $f : D \to D$ une fonction vérifiant $f(f(A)) = A$ pour tout A, et $f(A)f(B) < 1$ si et seulement si $AB < 1$. Montrer qu'il existe un point M de D tel que $Mf(M) < 1$.

Notre solution :

Pour tout point A de D et tout entier n, on note $D_n(A)$ l'ensemble des points de D à distance strictement inférieure à n de A. Par hypothèse, on a donc $f(D_1(A)) = D_1(f(A))$.

Supposons par l'absurde que pour tout M, $Mf(M) \geqslant 1$. On va voir qu'on peut en fait en déduire par récurrence que $Mf(M) \geqslant 2^k$ pour tout k, ce qui est évidemment absurde.

L'hypothèse de récurrence précise est que $Af(A) \geqslant 2^k$ et $f(D_{2^k}(A)) = D_{2^k}(f(A))$ pour tout point A de D. On a fait l'hypothèse que c'était vérifié pour $k = 0$. Supposons-le au rang k.

S'il existe un point A tel que $D_{2^k}(f(A)) = f(D_{2^k}(A))$ rencontre $D_{2^k}(A)$, ce qui revient à dire que $Af(A) < 2^{k+1}$, alors en particulier, le milieu M du segment $[Af(A)]$ est dans l'intersection de $D_{2^k}(A)$ et $f(D_{2^k}(A))$, et il en va de même pour $f(M)$, qui est bien dans $f(D_{2^k}(A))$ et $f^2(D_{2^k}(A)) = D_{2^k}(A)$. On a donc les relations $Af(M) < 2^k$, $f(A)f(M) < 2^k$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $Mf(M) \geqslant 2^k$, ce qui est absurde d'après le théorème de la médiane.

On vient donc de montrer que pour tout point A, $Af(A) \geqslant 2^{k+1}$. Il reste à voir de plus que pour tout A, $f(D_{2^{k+1}}(A)) = D_{2^{k+1}}(f(A))$. Cela résulte de ce que $D_{2^{k+1}}(A)$ est exactement l'ensemble des points qui sont à distance $< 2^k$ d'un point de $D_{2^k}(A)$, c'est-à-dire la réunion des $D_{2^k}(B)$ pour B dans $D_{2^k}(A)$. Son image est donc la réunion des $f(D_{2^k}(B)) = D_{2^k}(f(B))$ pour B dans $D_{2^k}(A)$, soit encore la réunion des $D_{2^k}(C)$ pour C dans $f(D_{2^k}(A)) = D_{2^k}(f(A))$, qui est précisément $D_{2^{k+1}}(f(A))$.

Cela achève la récurrence, qui fournit la contradiction recherchée. D'où finalement l'existence d'un point M de D tel que $Mf(M) < 1$.

Corrigé de l'envoi 6 — 2003 / 2004

Problème 3 :

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on écrit :

$$\frac{a(n)}{b(n)} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{avec } \mathrm{PGCD}(a(n), b(n)) = 1.$$

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $a(n)$ n'est pas une puissance d'un nombre premier.

Notre solution :

On procède par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini de tels n. En particulier, il existe un rang N à partir duquel tous les $a(n)$ sont des puissances d'un nombre premier. On note par ailleurs $h(n) = a(n)/b(n)$.

On commence par remarquer que pour tout n, $b(n) > n/2$. En effet, si l'on note k le plus grand entier tel que $2^k \leqslant n$, il n'y a dans la somme $1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ qu'un et un seul terme $1/m$ avec m divisible par 2^k, ce qui montre que $2^k > n/2$ divise $b(n)$.

Soit alors p un nombre premier impair plus grand que $N+1$. Alors en réduisant $h(p-1)$ modulo p (ce qui a bien un sens, puisque chacun des dénominateurs des rationnels qui interviennent dans la somme sont inversibles modulo p), on trouve :

$$h(p-1) \equiv 1^{-1} + 2^{-1} + \cdots + (p-1)^{-1} \equiv 1 + 2 + \cdots + (p-1) \equiv \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod p \quad (1)$$

car chaque élément de $\{1, \ldots, p-1\}$ est l'inverse modulo p d'un et un seul entier parmi $\{1, \ldots, p-1\}$. Il en résulte que p divise $a(p-1)$, et donc que $a(p-1)$ est une puissance de p. Mais si l'on avait $a(p-1) = p$, il viendrait $h(p-1) < \frac{p}{(p-1)/2} = 2 + 2/(p-1) \leqslant 3$. En choisissant p assez grand[1] pour que $h(p-1) \geqslant 3$, on a donc nécessairement $a(p-1) > p$, et donc $a(p-1)$ est une puissance de p au moins égale à p^2.

p étant toujours choisi supérieur à $N+1$ et tel que $h(p-1) \geqslant 3$, on peut ensuite montrer par récurrence que $a(p^k - 1)$ est une puissance de p au moins égale à p^2 pour tout $k \geqslant 1$. En effet, supposons le résultat pour un certain k. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} h(p^{k+1} - 1) &= \sum_{m=1}^{p^k - 1} \frac{1}{pm} + \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant p^{k+1} - 1 \\ p \nmid m}} \frac{1}{m} \\ &= \frac{h(p^k - 1)}{p} + \sum_{q=1}^{p^k - 1} \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{pq + r} \end{aligned}$$

Comme $h(p^k - 1)$ est divisible par p^2 au moins, le premier terme est divisible par p. De plus, pour chaque $1 \leqslant q \leqslant p^k - 1$, on a, en utilisant (1) :

$$\sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{pq + r} \equiv h(p-1) \equiv 0 \pmod p$$

[1] C'est possible, puisque $h(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Il en résulte que $h(p^{k+1}-1)$ est divisible par p, et donc que $a(p^{k+1}-1)$ est une puissance de p. Et par le même argument que précédemment, la condition $h(p^{k+1}-1) \geqslant h(p-1) \geqslant 3$ assure que ce n'est pas exactement p, ce qui achève la récurrence.

Par ailleurs, pour tout $k \geqslant 2$, on a :

$$h(p^k - p) = h(p^k - 1) + \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{r - p^k}$$

donc $h(p^k - p)$ est aussi divisible par p, en appliquant cette fois la congruence (1) à la somme des $1/(r-p^k)$.

Choisissons alors un entier n tel que p^n ne divise pas (le numérateur de) $1 + 1/2 + \cdots + 1/(p-1)$, et un entier $k > n$ tel que $p^k - p > 2p^n$. Alors $a(p^k - p)$ est une puissance de p telle que $a(p^k-p) \geqslant b(p^k-p) \geqslant (p^k-p)/2 \geqslant p^n$, donc p^n divise $h(p^k-p)$, et aussi $h(p^k-1)$ pour la même raison. Donc il divise leur différence, et l'on peut ainsi écrire, modulo p^n :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv \frac{1}{1-p^k} + \frac{1}{2-p^k} + \cdots + \frac{1}{p-1-p^k} \equiv 0 \pmod{p^n}$$

ce qui contredit la définition de n. Le résultat s'ensuit.

Corrigé de l'envoi 6 — 2003 / 2004

Problème 4 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ possède deux centres de symétrie. Prouver que f est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

Notre solution :

La courbe représentative de f est invariante par deux symétries centrales distinctes, donc aussi par leur composée, qui est une translation de vecteur $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ non nul. Comme le graphe ne peut pas contenir deux points de même abscisse, on a $a \neq 0$, ce qui permet d'écrire $b = \lambda a$. Alors pour tout réel x, on a la relation :

$$f(x + a) = \lambda a + f(x)$$

Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \lambda x$. On a $g(x + a) = g(x)$ pour tout x, donc g est périodique. Par conséquent, f est la somme de la fonction affine $x \mapsto \lambda x$ et de la fonction périodique g.

Corrigé de l'envoi 6 — 2003 / 2004

Problème 5 :

Soit $x > \mathbf{1}$ un rationnel tel qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ d'entiers pour laquelle $|x^n - a_n| < 1/n$. Montrer que x est entier.

Notre solution :

Écrivons $x = u/v$, avec u et v des entiers positifs, et pour tout n, posons la division euclidienne :

$$u^n = v^n Q_n + R_n$$

où l'on demande un reste R_n tel que $-v^n/2 \leqslant R_n < v^n/2$. En particulier, l'entier Q_n est à distance inférieure à $1/2$ de x, donc on a nécessairement $Q_n = a_n$ pour $n \geqslant 2$, ce qu'on suppose désormais.

On a $v^{n+1}Q_{n+1} + R_{n+1} = u^{n+1} = uv^n Q_n + uR_n$, donc $R_{n+1} \equiv uR_n \pmod{v^n}$ pour tout n. De plus, $|R_n| = v^n|x^n - Q_n| \leqslant v^n/n$, donc pour $n > u + v$, on a :

$$|R_{n+1} - uR_n| < \frac{v^{n+1}}{u+v} + \frac{uv^n}{u+v} = v^n$$

Comme v^n divise $R_{n+1} - uR_n$, on en déduit que $R_{n+1} = uR_n$ pour tout $n \geqslant N = u + v + 1$. Ainsi, $R_{N+k} = u^k R_N$ pour tout $k \geqslant 1$, d'où l'on tire, si R_N est non nul :

$$x^k = \frac{u^k}{v^k} = \frac{|R_{N+k}|}{|R_N|v^k} \leqslant \frac{v^{N+k}/(N+k)}{|R_N|v^k} = \frac{v^N}{|R_N|(N+k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

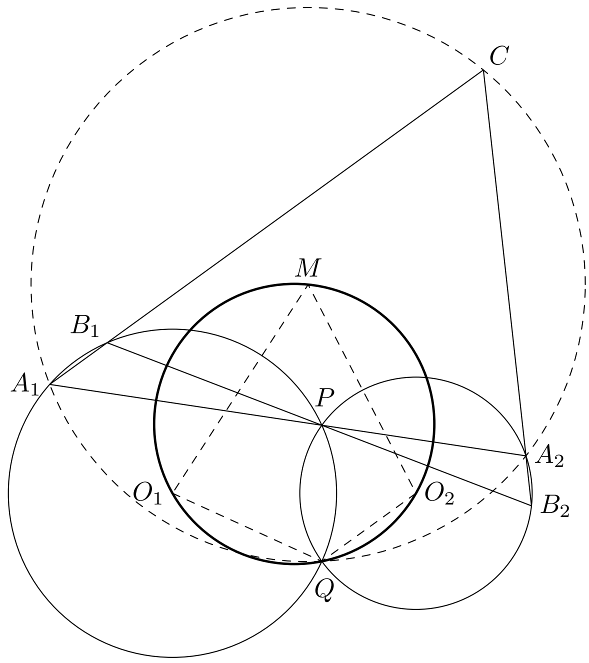
ce qui est absurde, puisque $x > 1$. Il s'ensuit que $R_N = 0$ et ainsi v^N divise u^N, donc v divise u et x est entier.

Corrigé de l'envoi 6 — 2003 / 2004

Problème 6 :

Les cercles S_1 et S_2 se rencontrent aux points P et Q. Si A_1 et B_1 sont deux points distincts sur $S_1 - \{P, Q\}$, les droites (A_1P) et (B_1P) rencoupent S_2 en A_2 et B_2 respectivement, et les droites (A_1B_1) et (A_2B_2) se rencontrent en C. On note M le centre du cercle circonscrit au triangle A_1A_2C. Déterminer le lieu des points M lorsque A_1 et B_1 décrivent chacun $S_1 - \{P, Q\}$.

Notre solution :



On commence par montrer que Q est sur le cercle circonscrit à A_1A_2C. Il suffit pour cela de voir que les angles en Q et C du quadrilatère A_1QA_2C sont supplémentaires :

$$\widehat{A_1CA_2} + \widehat{A_1QA_2} = \widehat{B_1CB_2} + \widehat{A_1QP} + \widehat{PQA_2} = \widehat{B_1CB_2} + \widehat{CB_1B_2} + \widehat{CB_2B_1} = \pi$$

en utilisant la cocyclicité de A_1, B_1, P, Q d'une part, et A_2, B_2, Q, P d'autre part.

On va voir ensuite, en exhibant à nouveau des angles supplémentaires, que M est sur le cercle circonscrit à Q et aux centres O_1 et O_2 à S_1 et S_2. En effet, par ce qui précède, $MQ = MA_1$, et de plus, $O_1Q = O_1A_1$, donc (MO_1) est la bissectrice de $[A_1Q]$. D'après le théorème de l'angle au centre, on a donc :

$$\widehat{MO_1Q} = \frac{1}{2}\widehat{A_1O_1Q} = \pi - \widehat{A_1PQ} \quad \text{et de même} \quad \widehat{MO_2Q} = \pi - \widehat{A_2PQ}$$

Par conséquent, il vient :

$$\widehat{MO_1Q} + \widehat{MO_2Q} = 2\pi - \widehat{A_1PQ} - \widehat{QPA_2} = \pi$$

ce qui dit bien que O_1, Q, O_2 et M sont cocycliques.

En observant que quand A_1 tend respectivement vers P, Q, et B_1, M tend vers O_2, Q et un point dépendant du point B_1 considéré, on conclut finalement que le lieu des points M est le cercle circonscrit à O_1QO_2 privé de O_2 et Q.