Corrigé de l'envoi 1 — 2003 / 2004

Problème 1 :

Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que

$$p^q + p^r$$

soit le carré d'un entier.

Notre solution :

Comme q et r jouent des rôles symétriques, on peut supposer $q \leqslant r$, et récrire alors l'entier considéré dans l'énoncé sous la forme

$$n = p^q(1 + p^{r-q})$$

On suppose que c'est un carré. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, tout nombre premier figure à une puissance paire dans la décomposition de n. C'est en particulier le cas du nombre premier p. Deux cas de figure se présentent alors.

Si q est impair alors, puisque p divise n un nombre pair de fois, il doit diviser $1 + p^{r-q}$. C'est impossible si $r > q$ (car alors le reste de la division euclidienne de $1 + p^{r-q}$ par p est 1 et non 0). Par conséquent, $r = q$, et p divise donc $1 + p^0 = 2$, d'où $p = 2$.

Réciproquement, on vérifie immédiatement que si :

$$(p, q, r) = (2, \ell, \ell) \quad \text{avec } \ell \text{ premier impair quelconque}$$

alors $n = 2^{\ell+1}$ est un carré.

Sinon $q = 2$ et alors $1 + p^{r-q}$ est lui même le carré d'un certain entier $k > 0$. Comme 2 n'est pas un carré, $s = r - q$ n'est pas nul. On a ainsi :

$$p^s = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$$

Le PGCD de $k - 1$ et $k + 1$ divise $(k + 1) - (k - 1) = 2$.

En particulier, si $k - 1$ est impair, $k - 1$ et $k + 1$ sont premiers entre eux. Comme leur produit a p pour seul facteur premier, il en résulte que $k - 1$ ou $k + 1$ vaut 1. Comme on a supposé k positif, on a donc $k = 2$, et par suite $p^s = 2^2 - 1 = 3$, soit $p = 3$ et $s = 1$. Cette situation correspond effectivement à une solution avec p, q, r premiers :

$$(p, q, r) = (3, 2, 3)$$

Si maintenant $k - 1 = 2m$ est pair, p est également pair, donc $p = 2$. On a ainsi $2^s = 4m(m + 1)$, où m et $m+1$ ne sont pas simultanément pairs, et comme 2^s n'est divisible par aucun nombre impair autre que 1, $m = 1$, donc $2^s = 8$, soit $s = 3$. Cette situation correspond encore à une solution :

$$(p, q, r) = (2, 2, 5)$$

Finalement, les triplets cherchés sont $(3, 2, 3)$, $(3, 3, 2)$, $(2, 2, 5)$, $(2, 5, 2)$ et tous les $(2, \ell, \ell)$ pour ℓ premier impair.

Corrigé de l'envoi 1 — 2003 / 2004

Problème 2 :

Soient a, b et c trois réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$$

Montrer :

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Quels sont les cas d'égalité ?

Notre solution :

La formule :

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\frac{\tan x}{1/\cos x}=\sin x$$

pour $x\in]0,\pi/2[$ suggère un changement de variable astucieux.[1] On note α,β,γ les éléments de $]0,\pi/2[$ définis par :

$$a=\tan\alpha \qquad b=\tan\beta \qquad c=\tan\gamma$$

L'inégalité cherchée prend donc la forme :

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or la fonction sinus est strictement concave sur $]0,\pi/2[$, puisque sa dérivée seconde $(-\sin)$ est strictement négative. On a ainsi :

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\leqslant\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

avec égalité si et seulement si $\alpha=\beta=\gamma$. On aura donc gagné si l'on parvient à évaluer $\alpha+\beta+\gamma$. Pour cela, on observe que l'hypothèse s'écrit :

$$\frac{1}{\tan\alpha\,\tan\beta}+\frac{1}{\tan\beta\,\tan\gamma}+\frac{1}{\tan\gamma\,\tan\alpha}-1=0$$

ou encore, en multipliant par les sinus figurant au dénominateur :

$$\begin{aligned}
0 &= \cos\alpha\,\cos\beta\,\sin\gamma+\sin\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma+\cos\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma-\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\\
&= \sin(\alpha+\gamma)\cos\beta+\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta\\
&= \sin(\alpha+\beta+\gamma)
\end{aligned}$$

$\alpha+\beta+\gamma$ est donc un multiple entier de π, et puisqu'il est strictement compris entre 0 et $3\pi/2$, il vaut exactement π. On a donc bien :

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\leqslant\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ce qui démontre l'inégalité cherchée :

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

et assure de plus que l'égalité n'a lieu que pour $\alpha=\beta=\gamma$, soit $a=b=c$ (la valeur commune étant alors $\sqrt{3}$).

[1] C'est une méthode classique. Voir le cours sur les inégalités, `<http ://www.animath.fr/cours/inegalites.pdf>`, chapitre 7, II, où ce changement de variable est dûment répertorié.

Corrigé de l'envoi 1 — 2003 / 2004

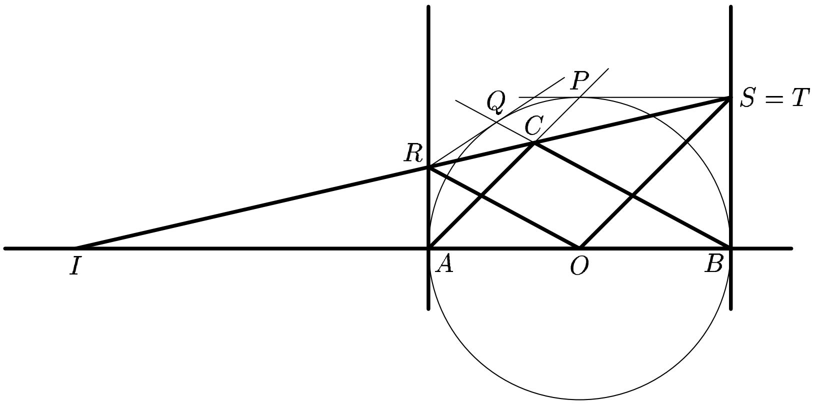
Problème 3 :

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ recoupe (AC) et (BC) respectivement en P et Q. Les tangentes en A et en Q au cercle $\mathcal{C}$ se coupent en R et les tangentes en B et en P au même cercle $\mathcal{C}$ se coupent en S.

Prouver que la droite (RS) passe par C.

Notre solution :

Soit O le milieu de $[AB]$, qui est le centre du cercle $\mathcal{C}$. Comme S est à égale distance de P et B (car OSP et OSB sont semblables), la droite (OS) est la médiatrice de $[PB]$. En particulier, elle est perpendiculaire à (PB). Or, comme le triangle ABP est rectangle en P, (PB) est elle-même perpendiculaire à (AC). Par conséquent, (OS) est parallèle à (AC). De la même manière, (OR) est parallèle à (BC). La figure devient donc :



Notons alors I et T les points d'intersection de (CR) avec (AB) et (OS) respectivement. On veut montrer qu'en fait, $T = S$, ou ce qui revient au même, que T appartient à (BS). Mais il suffit pour cela de voir que (BT) et (AR) sont parallèles. En effet, en appliquant le théorème de Thalès aux triangles semblables IAC et IOT d'une part, IOR et IBC d'autre part, il vient :

$$\frac{IA}{IO} = \frac{IC}{IT} \quad \text{et} \quad \frac{IO}{IB} = \frac{IR}{IC}$$

En multipliant ces deux relations, on obtient :

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IR}{IT}$$

d'où il résulte bien que (BT) et (AR) sont parallèles, et donc que R, C et S sont alignés.

Corrigé de l'envoi 1 — 2003 / 2004

Problème 4 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Trouver toutes les permutations $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ telles que, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, l'entier $i+1$ divise $2\,(a_1 + \ldots + a_i)$.

Notre solution :

Si l'on commence par examiner la situation pour les petites valeurs de n (3, 4, 5...) il semble que deux permutations seulement vérifient les hypothèses imposées : la permutation identique ($a_i = i$ pour tout i) et la transposition $(1, 2)$ (comme précédemment, sauf que $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$). Ces deux-là fonctionnent dans tous les cas, puisqu'elles vérifient $2(a_1 + \cdots + a_i) = i(i+1)$ pour tout $i \geqslant 2$, et on a l'impression que si l'on veut disposer les a_i dans un autre ordre, les choses « coincent » toujours avant la fin.

On va voir par récurrence que c'est effectivement le cas. Le résultat est vrai pour $n = 2$ ou 3. On le suppose alors au rang $n - 1 \geqslant 2$, et on cherche à le montrer pour une permutation $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Pour pouvoir se ramener au cas $n - 1$, il suffit juste de montrer que l'entier n est à sa place dans la permutation, i.e. que $a_n = n$, de sorte que $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ sera une permutation de $\{1, \ldots, n-1\}$ vérifiant les conditions qu'il faut pour appliquer l'hypothèse de récurrence.

Comme $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a :

$$2(a_1 + \cdots + a_n) = 2(1 + \cdots + n) = n(n+1)$$

Par conséquent n divise $2(a_1 + \cdots + a_n)$, et par hypothèse, il divise aussi $2(a_1 + \cdots + a_{n-1})$, donc il divise la différence $2a_n$. Si n est impair, on obtient donc que n divise a_n, donc que $a_n = n$, et on conclut comme on l'a dit.

Supposons alors que $n = 2k$ est pair. Si l'on n'a pas $a_n = n$, comme n divise $2a_n$, on doit avoir $a_n = k$. On sait par ailleurs que $n - 1$ divise :

$$2(a_1 + \cdots + a_{n-2}) = n(n+1) - 2a_n - 2a_{n-1}$$

En réduisant modulo $n - 1$, on obtient donc :

$$1 \cdot 2 - 2k - 2a_{n-1} \equiv 0 \pmod{n-1}$$

d'où, en simplifiant par 2 puisque $n - 1 = 2k - 1$ est impair :

$$a_{n-1} \equiv 1 - k \equiv k \pmod{n-1}$$

Comme a_{n-1} est parmi $\{1, 2, \ldots, n\}$, cela impose $a_{n-1} = k = a_n$, ce qui contredit le fait qu'on ait affaire à une permutation. Par conséquent, on a encore une fois $a_n = n$, et la récurrence opère.

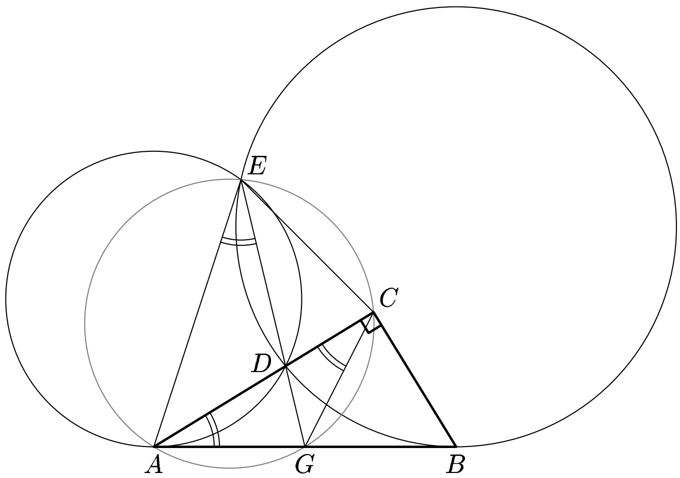
Finalement, on a bien montré que pour tout $n \geqslant 3$, les permutations $\{a_1, \ldots, a_n\}$ conformes aux hypothèses de l'énoncé sont exactement celles pour lesquelles $a_i = i$ pour $3 \leqslant i \leqslant n$.

Corrigé de l'envoi 1 — 2003 / 2004

Problème 5 :

ABC est un triangle rectangle en C. Soit D un point du segment $[AC]$ autre que A et C. Les cercles tangents à la droite (AB) aux points A et B et qui passent par D se recoupent en E. Montrer que $\widehat{BAC} = \widehat{DEC}$.

Notre solution :



Notons $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles tangents à (AB) en A et B respectivement. Soit de plus G le point d'intersection des droites (ED) et (AB). G a même puissance $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{GE}$ par rapport à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On a donc $GA^2 = GB^2$, et ainsi G est le milieu de $[AB]$. En particulier, c'est le centre du cercle circonscrit au trianqe ABC. Le triangle GAC est donc isocèle de sommet G, ce qui donne :

$$\widehat{GAC} = \widehat{ACG}$$

Mais les côtés de l'angle $\widehat{AGE}$ interceptent le cercle $\mathcal{C}_1$ selon la corde $[AD]$, donc les triangles GAD et AED sont inversement semblables. En partculier :

$$\widehat{AEG} = \widehat{AED} = \widehat{GAD} = \widehat{GAC}$$

d'où, d'après la relation précédente :

$$\widehat{AEG} = \widehat{ACG}$$

Il en résulte que les points A, E, C et G sont cocycliques. Par conséquent, il vient :

$$\widehat{BAC} = \widehat{GAC} = \widehat{GEC} = \widehat{DEC}$$

ce qui est bien la relation recherchée.

Corrigé de l'envoi 1 — 2003 / 2004

Problème 6 :

On définit la suite d'entiers (a_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \quad ; \quad a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que si un nombre premier p divise $a_{2k} - 2$, alors il divise $a_{2k+1} - 1$.

(On pourra établir : pour $n \geqslant 1$, $a_{n-1}a_{n+1} = a_n^2 + 5\,(-1)^{n-1}$).

Notre solution :

Consciencieux que nous sommes, nous commençons par démontrer l'indication. Pour cela, on introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2$$

On a $u_1 = a_0 a_2 - a_1^2 = 2 \cdot (2+1) - 1^2 = 5$, et pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 \\ &= a_n a_{n+1} + a_n^2 - a_{n+1}^2 \\ &= a_{n+1}(a_n - a_{n+1}) + a_n^2 \\ &= a_{n+1}(-a_{n-1}) + a_n^2 \\ &= -u_n \end{aligned}$$

ce qui donne bien $u_n = (-1)^{n-1}5$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui est exactement l'indication.

Supposons alors qu'un nombre premier p divise $a_{2k} - 2$, c'est-à-dire que $a_{2k} \equiv 2 \pmod p$. L'indication, pour $n = 2k$, dit que l'on a :

$$a_{2k}^2 - 5 = a_{2k-1}a_{2k+1} = (a_{2k+1} - a_{2k})a_{2k+1}$$

ce qui donne, en réduisant modulo p :

$$-1 \equiv 2^2 - 5 \equiv a_{2k+1}^2 - 2a_{2k+1} \pmod p$$

Autrement dit, p divise $(a_{2k+1} - 1)^2$, donc aussi $a_{2k+1} - 1$.