Vingt-Quatrième Tournoi des Villes

Automne 2002

Épreuve difficile, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Dans une banque travaillent 2002 employés. Tous les employés se sont rassemblés à une fête et se sont assis autour d'une même table ronde. On sait que la différence entre les salaires de deux employés assis à côté l'un de l'autre fait toujours 2 ou 3 dollars. De plus les salaires de tous les employés sont différents. Trouver la plus grande valeur possible de la différence de salaires entre deux employés de cette banque. `[4 points]`

Exercice 2 : Toutes les espèces de plantes en Russie ont été numérotées par les nombres de 2 à 20000 (chaque nombre est utilisé une et une seule fois). Pour chaque paire d'espèces différentes le plus grand commun diviseur de leurs numéros a été retenu, tandis que les numéros eux-mêmes ont été perdus (suite à une défaillance dans l'ordinateur). Peut-on rétablir les numéros de toutes les espèces ? `[5 points]`

Exercice 3 : Les sommets d'un 50-gone divisent un cercle en 50 arcs. Les longueurs des arcs sont 1, 2, ...50, dans un certain ordre. On sait que la différence de longueurs entre deux arcs opposés (c'est-à-dire entre deux arcs qui correspondent à des côtés opposés du 50-gone) fait toujours 25. Montrer que le 50-gone possède au moins deux côtés parallèles. `[6 points]`

Exercice 4 : À l'intérieur d'un triangle ABC se trouve un point P tel que $\widehat{ABP} = \widehat{ACP}$ et $\widehat{CBP} = \widehat{CAP}$. Montrer que P est le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC. `[6 points]`

Exercice 5 : Un N-gone convexe est divisé en triangles par des diagonales qui ne se coupent pas. Les triangles sont coloriés en noir et en blanc de telle manière que deux triangles possédant un côté commun ont toujours des couleurs différentes. Trouver, en fonction de N, le maximum de la différence entre le nombre de triangles blancs et le nombre de triangles noirs. `[7 points]`

Exercice 6 : On dispose d'un grand nombre de cartes en carton avec un entier de 1 à n écrit sur chaque carte. La somme des nombres sur toutes les cartes est égale à $k\,n!$, où k est un entier naturel. Montrer qu'on peut diviser les cartes en k groupes de telle façon que la somme des nombres sur les cartes de chaque groupe fasse $n!$. (N.B. $n!$ est le produit de tous les entiers entre 1 et n ; $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.) `[9 points]`

Exercice 7 :

a) Un réseau électrique a la forme d'un carré 3×3. Il possède 16 nœuds (les sommets des cases) qui sont reliés par des fils (les côtés des cases). Certains des fils ont brûlé et ne conduisent plus le courant. En une mesure on peut choisir n'importe quel couple de nœuds et tester si le courant passe d'un nœud à l'autre (autrement dit, s'il existe un chemin constitué de fils non brûlés reliant un nœud à l'autre). En réalité, les fils brûlés sont disposés d'une telle façon que le courant passe entre n'importe quels deux nœuds. Quel est le plus petit nombre de mesures nécessaire pour s'en assurer ? `[5 points]`

b) Même question pour un réseau qui a la forme d'un carré 5×5 avec 36 nœuds. `[5 points]`