Vingt-Quatrième Tournoi des Villes

Automne 2002

Épreuve difficile, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Toutes les espèces de plantes en Russie ont été numérotées par les nombres de 2 à 20000 (chaque nombre est utilisé une et une seule fois). Pour chaque paire d'espèces différentes le plus grand commun diviseur de leurs numéros a été retenu, tandis que les numéros eux-mêmes ont été perdus (suite à une défaillance dans l'ordinateur). Peut-on rétablir les numéros de toutes les espèces ? `[4 points]`

Exercice 2 : La section d'un cube par un plan est un pentagone. Montrer que ce pentagone possède un côté dont la longueur diffère d'au moins 20 centimètres de 1 mètre. `[6 points]`

Exercice 3 : Un N-gone convexe est divisé en triangles par des diagonales qui ne se coupent pas. Les triangles sont coloriés en noir et en blanc de telle manière que deux triangles possédant un côté commun ont toujours des couleurs différentes. Trouver, en fonction de N, le maximum de la différence entre le nombre de triangles blancs et le nombre de triangles noirs. `[6 points]`

Exercice 4 : On dispose d'un grand nombre de cartes en carton avec un entier de 1 à n écrit sur chaque carte. La somme des nombres sur toutes les cartes est égale à $k\,n!$, où k est un entier naturel. Montrer qu'on peut diviser les cartes en k groupes de telle façon que la somme des nombres sur les cartes de chaque groupe fasse $n!$. `[8 points]`

Exercice 5 : Deux cercles C_1 et C_2 se coupent en des points A et B. Une droite passant par le point B coupe une deuxième fois les cercles C_1 et C_2 aux points K et M respectivement. La droite l_1 est tangente au cercle C_1 en un point Q et est parallèle à AM. Soit R le deuxième point d'intersection de la droite QA avec le cercle C_2.

a) Montrer que la droite l_2 tangente au cercle C_2 en R est parallèle à AK. `[4 points]`

b) Montrer que les droites l_1, l_2 et KM sont concourantes. `[4 points]`

Exercice 6 : Considérons la suite dont les deux premiers termes sont 1 et 2 et telle que chaque terme suivant est le plus petit entier strictement positif qui n'est encore jamais apparu dans la suite et qui n'est pas premier avec le terme précédent de la suite. Montrer que chaque entier strictement positif apparaîtra dans cette suite. `[8 points]`

Exercice 7 :

a) Un réseau électrique a la forme d'un carré 3×3. Il possède 16 nœuds (les sommets des cases) qui sont reliés par des fils (les côtés des cases). Certains des fils ont brûlé et ne conduisent plus le courant. En une mesure on peut choisir n'importe quel couple de nœuds et tester si le courant passe d'un nœud à l'autre (autrement dit, s'il existe un chemin constitué de fils non brûlés reliant un nœud à l'autre). En réalité, les fils brûlés sont disposés d'une telle façon que le courant passe entre n'importe quels deux nœuds. Quel est le plus petit nombre de mesures nécessaire pour s'en assurer ? `[4 points]`

b) Même question pour un réseau qui a la forme d'un carré 7×7 avec 64 nœuds. `[5 points]`