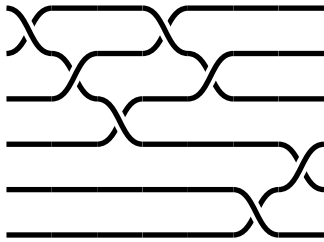


Les tresses

Une tresse est un ensemble de brins qui partent à gauche tous alignés, qui progressent vers la droite éventuellement en passant les uns au-dessus des autres, et qui arrivent alignés à droite. Exemple :



On considère que deux tresses sont équivalentes si l'une peut se déformer en l'autre (à extrémités fixées). Par exemple, les deux tresses suivantes sont équivalentes :



Pouvez-vous donner des règles permettant de savoir si deux tresses sont équivalentes? Pouvez-vous donner des règles permettant d'être sûr que deux tresses ne sont pas équivalentes?

(Très difficile) Ces règles suffisent-elles à résoudre le problème de l'équivalence pour *toutes* les tresses?

On peut multiplier deux tresses ayant le même nombre de brins, simplement en les mettant l'une après l'autre. Par exemple



Si a et b sont des tresses, est-ce que $a * b$ est nécessairement une tresse équivalente à $b * a$?

Voici la tresse neutre :



Toute autre tresse, multipliée par celle-ci, restera inchangée.

Étant donnée une tresse a , pouvez-vous trouver une tresse b telle que $a * b$

soit équivalent à la tresse neutre ? Voici un exemple :

$$\begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} * \begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Pouvez-vous trouver un ensemble de tresses qui permettent, par multiplication entre elles, de retrouver *toutes* les tresses (à un nombre fixé de brins) ?
 (Plus difficile) pouvez-vous construire toutes les tresses à partir de seulement 4 tresses de base (à nombre de brins fixé) ?