Olympiade Française de Mathématiques
Corrigé du test de sélection du 29 septembre 2010

Problème 1
Pour quelles valeurs de l'entier k, le polynôme

$$X^{2011} - X^{2009} + X^2 + kX + 1$$

admet-il une racine rationnelle ?

<u>Solution.</u> Supposons que $\frac{p}{q}$ soit une fraction irréductible racine du polynôme de l'énoncé, que nous notons P_k. On a alors

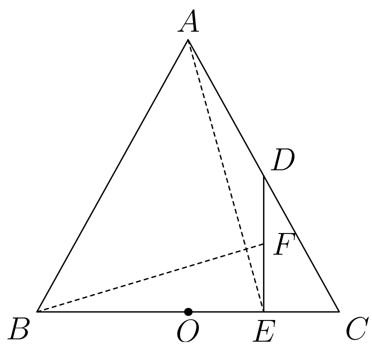
$$p^{2011} - p^{2009}q^2 + p^2q^{2009} + kpq^{2010} + q^{2011} = 0.$$

Il en résulte que q divise p^{2011}, ce qui n'est possible, étant donné que p et q sont premiers entre eux, que si $q = \pm 1$. De même p divise q^{2011} et donc $p = \pm 1$ aussi. En conclusion, les racines rationnelles de P_k ne peuvent être que 1 et -1.
Il ne reste plus qu'à trouver les valeurs de k correspondantes. En écrivant que 1 (resp. -1) annule P_k, on obtient $k = -2$ (resp. $k = 2$). Les valeurs possibles de k sont donc 2 et -2.

À retenir : si une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est racine d'un polynôme à coefficients entiers, alors p divise le coefficient constant et q divise le coefficient dominant du polynôme. En particulier, si le polynôme est unitaire (*i.e.* de coefficient dominant égal à 1), toute racine rationnelle est nécessairement entière.

Problème 2
Soit ABC un triangle isocèle, avec $AB = AC$. On note D le milieu du côté $[AC]$ et E la projection orthogonale de D sur BC. Soit F le milieu du segment $[DE]$.
Montrer que les droites BF et AE sont perpendiculaires si, et seulement si le triangle ABC est équilatéral.

<u>Solution.</u> Bien que cela ne soit pas conseillé généralement, une solution analytique est tout à fait adapté à cet exercice. On introduit le point O milieu de (BC) et un repère orthonormé de centre O dont l'axe des abscisses est dirigé par la droite (BC) et l'axe des ordonnées par la droite (OA).



Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(0, a)$, $(-b, 0)$ et $(0, b)$. On en déduit facilement que E et F ont respectivement pour coordonnées $(\frac{b}{2}, 0)$ et $(\frac{b}{2}, \frac{a}{4})$. La condition d'orthogonalité s'exprime par un produit scalaire qui donne ici $a^2 = 3b^2$. Il est aisé de vérifier que cette condition est bien équivalente au fait que ABC soit équilatéral.

Problème 3
a) Soient O, A, B, C quatre points du plan tels que $OA = OB = OC$ et

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}.$$

Montrer que A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral.

b) Soient O, A, B, C, D cinq points du plan tels que $OA = OB = OC = OD$ et

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}.$$

Montrer que A, B, C, D sont les sommets d'un rectangle.

<u>Solution.</u> a) Il suffit de démontrer que les angles géométriques $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ valent tous les trois 120°. Or, si r désigne la valeur commune de OA, OB et OC, on a

$$r^2 = OC^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2r^2 \cdot (1 + \cos \widehat{AOB}).$$

On en déduit que $\cos \widehat{AOB} = -\frac{1}{2}$ et donc que l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ vaut bien 120°. On démontre de la même façon le résultat annoncé pour les deux autres angles.

b) Quitte à échanger les rôles des points A, B, C et D, on peut supposer qu'ils sont disposés dans cet ordre sur le cercle Γ de centre O et de rayon $r = OA$. Il est clair qu'aucun angle parmi $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOA}$ ne peut dépasser strictement 180° car, dans le cas contraire, les quatre vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ seraient dans un même demi-plan ouvert, et leur somme ne pourrait être nulle. La relation vectorielle de l'énoncé implique :

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})^2,$$

ce qui donne, en développant comme précédemment, $\cos \widehat{AOB} = \cos \widehat{COD}$ et donc $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. De même, on démontre que $\widehat{BOC} = \widehat{DOA}$, à partir de quoi on obtient $\widehat{AOC} = 180°$. Ainsi la diagonale $[AC]$ est un diamètre de Γ, ce qui assure que les angles en B et D sont droits. On démontre pareillement que les angles en A et C sont droits, d'où il suit finalement que $ABCD$ est un rectangle.

Problème 4

Soient a, b, c des entiers strictement positifs tels que $2c$ divise ab, $3a$ divise bc et $5b$ divise ca.
Quelle est la plus petite valeur possible du produit abc ?

<u>Solution.</u> Nous allons montrer que la plus petite valeur cherchée est 900. Tout d'abord, remarquons que cette valeur est atteinte avec les données suivantes : $a = 2\times 5 = 10$, $b = 2\times 3 = 6$ et $c = 3\times 5 = 15$. Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer que l'on ne peut obtenir un résultat plus petit. Plus exactement, nous allons démontrer que si a, b et c vérifient les conditions de l'énoncé, alors 900 divise abc. Du fait que $2c$ divise ab et $3a$ divise bc, on déduit que $6ac$ divise ab^2c, et donc que 6 divise b^2. De là, il suit que b est un multiple de 6, comme on le voit par exemple en décomposant b en facteurs premiers. On démontre de même que 10 divise a, et que 15 divise c. On en déduit, comme annoncé, que $6 \times 10 \times 15 = 900$ divise abc.

Problème 5

Pour tout réel x strictement positif, montrer

$$1 + x^{2006} \geqslant \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}.$$

<u>Solution.</u> On utilise l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique sous sa forme la plus simple : $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ pour a et b des réels positifs. Ici, on obtient :

$$1 + x^{2006} \geqslant 2x^{1003} \quad \text{et} \quad 1 + x \geqslant 2\sqrt{x}.$$

La seconde inégalité fournit :

$$\frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}} \leqslant \frac{(2x)^{2005}}{(2\sqrt{x})^{2004}} = 2x^{1003}.$$

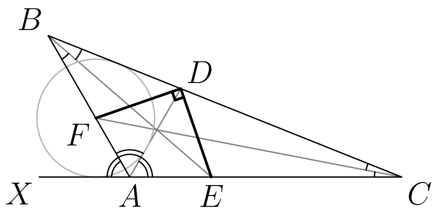
En regroupant, il vient :

$$1 + x^{2006} \geqslant 2x^{1003} \geqslant \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}$$

comme voulu.

Problème 6
Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 120°$. Les bissectrices intérieures issues de A, B, C rencontrent les côtés opposés en D, E, F.
Montrer que le cercle de diamètre $[EF]$ passe par D.

<u>*Solution.*</u> Soit X un point de la droite (AC) à gauche de A :



Les trois angles marqués avec deux traits ont une mesure de $\frac{\pi}{3}$, d'où on déduit que la droite (AB) bissecte l'angle $\widehat{DAX}$. Ainsi F est le centre du cercle exinscrit au triangle ADC relativement à l'angle $\hat{A}$. Il s'ensuit que F est situé sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BDA}$. De même, on montre que E est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$. L'angle $\widehat{FDE}$ vaut donc la moitié de l'angle plat $\widehat{BDC}$ et par suite est droit. Cela donne directement la conclusion.

Problème 7
Déterminer les fonctions strictement monotones f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ telles que, pour tous x, y de $\mathbb{R}_+^\star$:

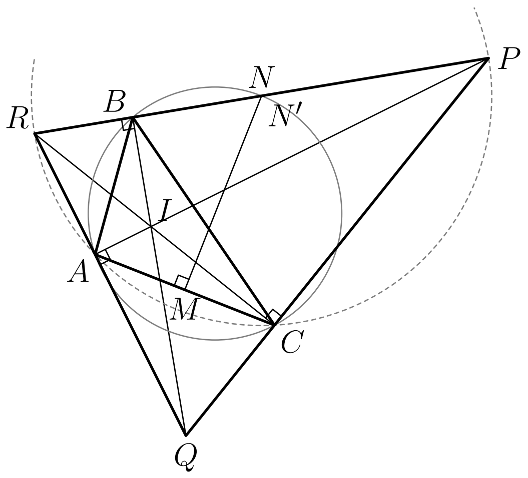
$$f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{f(f(x))}{y}.$$

<u>*Solution.*</u> En faisant « $x = y = 1$ » dans l'équation de l'énoncé, on obtient $f(1) = f \circ f(1)$. En faisant ensuite « $x = 1$ » et « $y = f(1)$ », il vient $f(1) = 1$. Avec $y = x$, l'équation donne alors $f \circ f(x) = x$.
Distinguons maintenant deux cas selon le sens de variation de f. Si f est strictement croissante, il ne peut exister de nombre x tel que $f(x) < x$. En effet, dans le cas contraire, on trouverait en appliquant f à l'inégalité précédente $x = f \circ f(x) < f(x)$, ce qui est manifestement contraire à notre hypothèse. De même, on démontre qu'on ne peut avoir $f(x) > x$, d'où on déduit que f est nécessairement la fonction identité.
Supposons maintenant, au contraire, que la fonction f soit strictement décroissante. Il est alors clair que f admet au plus un point fixe. Comme par ailleurs, on a déjà vu que $f(1) = 1$, elle admet exactement un point fixe qui est 1. Or, en appliquant l'équation de l'énoncé avec $y = \frac{1}{f(x)}$, on obtient $f(xf(x)) = xf(x)$, ce qui signifie que la quantité $xf(x)$ est un point fixe de f. Avec ce qui a été dit précédemment, on en déduit que nécessairement $xf(x) = 1$, c'est-à-dire $f(x) = \frac{1}{x}$.
Les deux seules solutions éventuelles sont donc la fonction identité, et la fonction inverse, et on vérifie enfin que chacune des deux vérifie l'équation de l'énoncé.

Problème 8
Soit ABC un triangle tel que $AB < BC$.
Soient M le milieu de $[AC]$ et N le milieu de l'arc de cercle limité par A et C et passant par B.
Si I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, montrer

$$\widehat{IMA} = \widehat{INB}.$$

Solution. On commence par faire une figure :



Les points P, Q et R sont les centres des cercles exiscrints au triangle ABC. Le point I s'obtient alors comme l'orthocentre de PQR et le cercle Γ circonscrit à ABC est le cercle d'Euler de PQR. On en déduit que le point N' milieu de $[PR]$ est sur Γ. Mais les points P, R, A et C sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[PR]$. Ainsi $N'A = N'C$ et les points N et N' sont confondus.
La même cocyclicité entraine que les triangles IAC et IRP sont inversement semblables. La similitude inverse qui envoie IAC sur IRP envoie M, milieu de $[AC]$, sur N, milieu de $[PR]$. On en déduit $\widehat{IMA} = \widehat{INR}$ et puis $\widehat{INR} = \widehat{INB}$ puisque B est entre R et N par l'hypothèse $AB < BC$.