Eliminatoires de la coupe Animath d'automne 2017

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté. Il suffit de trouver 7 bonnes réponses sur 12 pour se qualifier. Plusieurs essais sont possibles. Pour le premier essai, il faut s'inscrire sur le site, et pour les fois suivantes il suffit de se reconnecter au moyen du code qui s'affiche lors de la première connexion.

N.B. L'inscription à la coupe Animath d'automne 2017 est indépendante de l'inscription à la coupe Animath de juin 2017 ou des tests d'entrée de l'OFM passés.

Exercices collégiens

Exercice 1. Soient a et b des entiers tels que $(1+\sqrt{2})(a+b\sqrt{3}) = 3+3\sqrt{2}+5\sqrt{3}+5\sqrt{6}$. Déterminer $a+b$.

Exercice 2. Cédric a acheté des abricots et des bananes. Emmanuel a acheté trois fois plus d'abricots et trois fois moins de bananes que Cédric, et a payé 50% plus cher. Sachant que chacun a dépensé un nombre entier non nul d'euros pour les bananes, ainsi que pour les abricots, et qu'aucun des deux n'a dépensé strictement plus de 30 euros au total, quelle somme totale ont-ils payée à eux deux ?

Exercice 3. On note $10! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10$. Déterminer le nombre d'entiers naturels n tels que n soit un diviseur de 10!, et tels que n soit un multiple de k pour tout entier $k = 1, 2, \ldots, 10$.

Exercice 4. Déterminer le nombre d'entiers x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2017000$ et tels que 2017 divise $x^2 + x$.

Exercice 5. 5 garçons et 5 filles veulent s'asseoir sur un banc. De combien de manières peuvent-ils le faire de sorte que deux garçons ne soient jamais côte à côte, et deux filles ne soient jamais côte à côte ?

Exercice 6. Combien y a-t-il de manières d'insérer un ou plusieurs signes + entre certains caractères de 1234567890 pour que l'expression obtenue ait un sens ?

Exercice 7. Dans un triangle, le plus grand angle est le double du plus petit, et le troisième angle surpasse de 8° le plus petit. Déterminer la valeur en degrés du plus petit angle.

Exercice 8. Dans un triangle rectangle en A, l'angle entre la médiane issue de A et la hauteur issue de A est égal à 24°. Déterminer la valeur en degrés du plus petit angle du triangle.

Exercices communs

Exercice 9. Soit x un nombre réel tel que $\frac{3+\frac{17}{x}}{5+\frac{13}{x}} = \pi$. On suppose que $x = \frac{a\pi+b}{c\pi+d}$ où a, b, c, d sont des entiers relatifs. Déterminer la valeur de $\frac{a+b}{c+d}$.

Exercice 10. Déterminer la plus petite valeur possible de $a+b$ si a et b sont des entiers naturels vérifiant $3^8 \times 5^2 = a^b$.

Exercice 11. On considère un carré $ABCD$. Une puce part du point A. Chaque seconde, elle saute vers l'un des trois sommets du carré autres que celui sur lequel elle se trouve. Déterminer le nombre possible de parcours comportant 7 sauts et allant du point A vers le point B.

Exercice 12. Soient A, B, C, D, E cinq points alignés dans cet ordre tels que $AB = BC = CD = DE = 6$. On note S l'aire de la zone située à l'intérieur du disque de centre C passant par A et à l'extérieur des trois disques de centres B, C, D de rayon 6. Déterminer l'entier a tel que $(S - a\pi)^2$ soit un entier.

Exercices lycéens

Exercice 13. Soit a un nombre réel strictement positif tel que $a^{20} + \frac{1}{a^{20}} = 2207$. Déterminer la valeur de $a^5 + \frac{1}{a^5}$.

Exercice 14. A tout instant $t \in \mathbb{R}$, un objet se déplace dans le plan de sorte que ses coordonnées soient $x(t) = t^2 - t$ et $y(t) = 1000t - t^3$. Il se trouve que cet objet passe deux fois par le même point. Déterminer l'abscisse de ce point.

Exercice 15. Déterminer le plus grand entier qui divise $(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 16. Soit $A = (2^2 - 1)(3^2 - 1)(4^2 - 1) \cdots (100^2 - 1)$. Déterminer le plus grand entier n tel que 2^n divise A.

Exercice 17. On considère la liste des entiers strictement positifs qui n'ont pas de facteur commun avec 105 : $1, 2, 4, 8, 11, 13, \ldots$. Déterminer le millième terme de cette liste.

Exercice 18. Déterminer le plus petit entier n tel que, si on sélectionne aléatoirement de manière uniforme deux cases distinctes d'une grille $n \times n$, alors la probabilité que ces deux cases soient adjacentes est strictement inférieure à $1/2017$.

Exercice 19. Soient P, Q, R trois points tels que Q soit le milieu de $[PR]$. On suppose que $PQ = 20$. Une droite passant par P recoupe le cercle de diamètre $[PQ]$ en A et le cercle de diamètre $[QR]$ en B et C. On suppose que B est le milieu de $[AC]$. Déterminer la valeur de PB^2.

Exercice 20. Soit $ABCD$ un rectangle. Soient E et F des points tels que A, E, F, B soient alignés dans cet ordre. On suppose que $AE = FB = BC = 1$. Soit G l'intersection des droites (DE) et (CF). On suppose que l'aire de GCD est égale à 2017. Déterminer l'entier m tel que $\sqrt{m} - EF$ soit un entier.