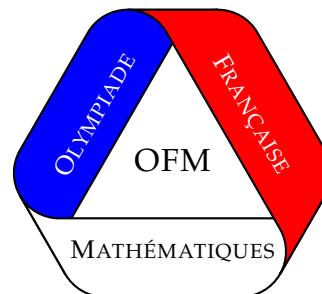


ANIMATH OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DE RENTRÉE
MERCREDI 5 OCTOBRE 2016

DURÉE :
3 HEURES POUR LES ÉLÈVES DE COLLÈGE
4 HEURES POUR LES ÉLÈVES DE LYCÉE

Instructions

- ▷ Il est **impératif** de rendre une feuille simple séparée sur laquelle vous écrirez votre nom, prénom, adresse email, nom de l'établissement et sa ville ainsi que votre classe.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Les élèves de collège doivent chercher les exercices de 1 à 5.
- Les élèves de lycée doivent chercher les exercices de 4 à 8.
- Les exercices sont notés chacun sur 7 points.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe et le numéro du problème en haut à droite.

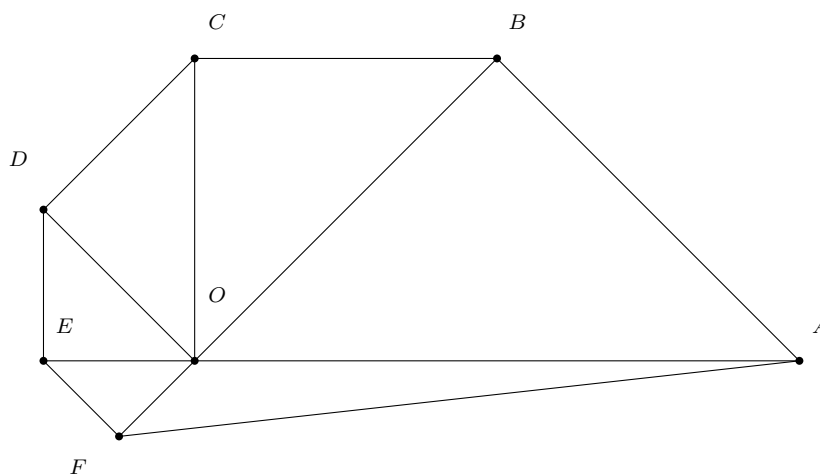
EXERCICES COLLÈGE

Exercice 1. Alice, Bernard, Cédric et Diane jouaient au tennis dans la cour. Soudain, la balle brisa la fenêtre du voisin. Furieux, celui-ci s'approcha des quatre enfants.

Alice dit : "Ce n'est pas moi !". Bernard dit : "C'était Diane". Cédric dit : "Non, c'était Bernard". Diane dit : "Bernard a menti".

En supposant qu'exactement un des quatre enfants a dit la vérité, lequel d'entre eux a-t-il cassé la vitre du voisin ?

Exercice 2. Dans la figure ci-dessous, les triangles ABO , BCO , CDO , DEO et FEO sont rectangles isocèles. On suppose que $OA = 8$ cm. Déterminer l'aire de AOF en cm^2 .



Exercice 3. 2016 points sont alignés sur une droite. De combien de manières peut-on les colorier en rouge, vert ou bleu, de sorte que deux points voisins quelconques soient de couleur différente, et que chaque couleur soit utilisée au moins une fois ?

EXERCICES COMMUNS

Exercice 4. Deux cercles C_1 et C_2 sont tangents extérieurement en un point X . Une tangente commune aux deux cercles rencontre C_1 en Y et C_2 en Z (avec $Y \neq Z$). Soit T tel que $[YT]$ est un diamètre de C_1 . Montrer que T, X, Z sont alignés.

Exercice 5. Un palindrome est un nombre dont l'écriture décimale ne change pas si on inverse l'ordre des chiffres. Par exemple, 3773 est un palindrome. Un nombre à quatre chiffres \overline{abcd}

est dit *équilibré* si $a + b = c + d$ (par exemple, 2736 est équilibré). Déterminer tous les nombres équilibrés à quatre chiffres qui sont somme de deux palindromes à quatre chiffres.

Note : un palindrome ne peut pas commencer par un zéro. Par exemple, 0770 n'est pas un palindrome.

EXERCICES LYCÉE

Exercice 6. Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ tels que l'on puisse placer n nombres réels deux à deux distincts sur un cercle de sorte que chacun de ces nombres soit le produit de ses deux voisins.

Exercice 7. Le nombre "3" est écrit sur un tableau. Alice et Bernard jouent au jeu suivant : chacun leur tour, si on désigne par n le nombre écrit au tableau, le joueur le remplace par un entier m tel que $n < m < n^2$, et tel que m n'a pas de diviseur commun avec n autre que 1. Le premier joueur qui atteint un nombre plus grand ou égal à 2016 perd la partie. Alice commence.

Déterminer quel est le joueur pour lequel il existe une stratégie lui permettant de gagner à coup sûr, et décrire cette stratégie.

Exercice 8. Une liste de nombres est dite *jolie* si elle est constituée de nombres entiers strictement positifs tels que la somme de ces entiers est égale à leur produit. Déterminer le plus petit nombre d'entiers égaux à un qui peut contenir une jolie liste de 100 nombres.

* * *