OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DE RENTRÉE

MERCREDI 7 OCTOBRE 2015

CORRIGÉ

EXERCICES COLLÈGE

Exercice 1. Quinze élèves participent à un stage de mathématiques. Chaque soir, trois d'entre elles vont manger une glace. À la fin du stage, il se trouve que deux élèves quelconques sont toujours allées manger une glace en même temps une et une seule fois. Combien de jours le stage a-t-il duré? Justifiez votre réponse.

Solution de l'exercice 1 Si on choisit une élève A, puis une autre élève B, on forme ainsi 15×14 paires d'élèves, mais chaque paire est comptée deux fois puisque pour former la paire $\{A, B\}$ on peut d'abord choisir A puis B, ou bien d'abord choisir B puis A. Par conséquent, il y a au total $15 \times 14/2 = 105$ paires d'élèves.

Si 3 élèves A, B, C vont manger une glace le même soir, il y a donc trois paires $\{A, B\}, \{B, C\}$ et $\{C, A\}$ d'élèves qui vont simultanément manger une glace. On en déduit que chaque soir, trois paires d'élèves vont manger une glace, donc il y a au total $105/3 = 35$ soirs.

Exercice 2. On prend trois chiffres x, y, z tels que $x > y > z > 0$. En faisant la somme des six nombres à trois chiffres obtenus en permutant ces 3 chiffres on trouve 4884 (par exemple, si $x = 3$, $y = 2$ et $z = 1$ on aurait trouvé $321+312+213+231+123+132 = 1332$). Quelles sont les valeurs possibles du nombre formé par les trois chiffres x, y, z (pris dans cet ordre)? Justifiez votre réponse.

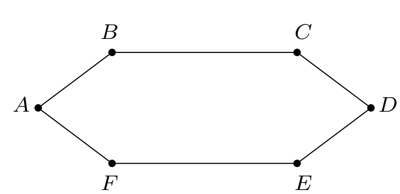
Solution de l'exercice 2 On a $(100x+10y+z)+(100x+10z+y)+(100y+10x+z)+(100y+10z+x)+(100z+10x+y)+(100z+10y+x) = 222(x+y+z)$ donc $x+y+z = 4884/222 = 22$.

Si $x \leqslant 8$, alors $y \leqslant 7$ et $z \leqslant 6$ donc $x+y+z \leqslant 21$, ce qui est impossible. Donc $x = 9$ et $y+z = 13$.

Comme $y > z$, on a $y > 13/2$ donc $y = 7$ ou $y = 8$. Dans le premier cas on a $x = 6$, et dans le deuxi on a $x = 5$.

Conclusion : les solutions sont 976 et 985.

Exercice 3. Dans la figure ci-dessous, $AB = AF = CD = DE = 18$, $BC = EF = a$ et $BF = 24$. Par ailleurs, le quadrilatère $BCEF$ est un rectangle.



On suppose que l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est égale à l'aire d'un rectangle dont deux côtés qui se suivent ont pour longueur a et 36. Trouver a^2. Justifiez votre réponse.

Note. On pourra utiliser le théorème de Pythagore, qui s'énonce comme suit. Si XYZ est un triangle rectangle en X, alors $XY^2 + XZ^2 = YZ^2$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit H le milieu de $[BF]$. On a $BH = 12$, donc $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 18^2 - 12^2 = 6^2(3^2 - 2^2) = 5 \times 36$, ce qui donne $AH = 6\sqrt{5}$.

On en déduit que l'aire de ABF vaut $1/2 \times \sqrt{5} \times 6 \times 24$, donc l'aire de l'hexagone est égale à $\sqrt{5} \times 6 \times 24 + 24 \times a = 24(6\sqrt{5} + a)$.

Par conséquent, $24(6\sqrt{5}+a) = 36a$ ce qui se simplifie en $2(6\sqrt{5}+a) = 3a$, ou encore $a = 12\sqrt{5}$.

Finalement, $a^2 = 720$.

Exercices communs

Exercice 4. Pour tout entier strictement positif k, si k est inscrit au tableau, on peut l'effacer et le remplacer par le nombre $a + b$, du moment que a et b sont des entiers strictement positifs tels que $ab = k$ (par exemple, il est possible de remplacer 20 par 12, car $12 = 2 + 10$ et $20 = 2 \times 10$).

Initialement, on a inscrit l'entier $n > 0$ au tableau. Déterminer, selon les valeurs de n, le plus petit nombre qu'il est possible d'écrire au tableau après un nombre fini de remplacements (éventuellement aucun).

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Notons $f(n)$ le plus petit nombre que l'on peut obtenir après un nombre fini de remplacements.

Notons d'abord que si $a + b \leqslant 4$, alors $ab \leqslant 4$. Pour le prouver, quitte à échanger a et b on peut supposer que $a \geqslant b$, donc ($a = 3$ et $b = 1$) ou ($a = 2$ et $b \leqslant 2$). Dans le premier cas on a $ab = 3$, et dans le deuxième cas on a $ab \leqslant 2 \times 2 = 4$.

Ceci montre que si on part d'un nombre $\geqslant 5$, après un remplacement on obtient toujours un nombre $\geqslant 5$, et donc après un nombre fini de remplacements le nombre obtenu reste $\geqslant 5$.

Réciproquement, soit $n \geqslant 6$.

Si n est pair, comme $n = 2(n/2)$ on peut le remplacer par $2+(n/2)$. Or, $2+(n/2) < n$ équivaut à $2 < \frac{n}{2}$, ce qui est vrai.

Si n est impair, on peut le remplacer par $n+1$ car $n = 1 \times n$, puis par $2 + \frac{n+1}{2}$. Or, $2 + \frac{n+1}{2} < n$ équivaut à $2 + \frac{1}{2} < \frac{n}{2}$, ce qui est vrai car $n > 5$.

On a ainsi montré qu'à partir de tout entier $n > 5$ on peut atteindre un entier strictement plus petit que n, donc au bout d'un nombre fini d'étapes on atteint l'entier 5.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 5$ on a $f(5) = 5$.

De plus, si $n < 5$ alors on vérifie facilement qu'après un unique remplacement on obtient toujours un entier $\geqslant n$, donc $f(n) = n$ (atteint au bout de zéro remplacement).

Exercice 5. On fixe un nombre entier $n \geq 2$ et on considère des nombres $a_1, \ldots, a_n$ tels que $-\frac{1}{2} \leq a_i \leq \frac{1}{2}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On suppose que si on retire n'importe lequel de ces nombres, la somme des $n - 1$ autres est toujours un nombre entier relatif.

(1) Si n est pair, montrer que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(2) Si n est impair, a-t-on toujours $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$?

Solution de l'exercice 5 (1) Soit s la somme de tous ces entiers. Par hypothèse, $s - a_1$ et $s - a_2$ sont des entiers, donc $a_1 - a_2 = (s - a_2) - (s - a_1)$ est un entier. Or, il est compris entre -1 et 1 car a_1 et a_2 appartiennent à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Par conséquent, a_1 et a_2 sont égaux ou bien diffèrent d'une unité.

Supposons que les entiers $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas tous égaux. Quitte à les réordonner, on peut supposer que $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$ et que $a_i > a_1$ pour tout $i > k$. Alors d'après ce qui précède, $a_i = a_1 + 1$ pour tout $i > k$, et donc $a_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $a_i = \dfrac{1}{2}$ pour tout $i > k$. On a alors $s - a_1 = -(k-1)/2 + (n-k)/2 = (n - 2k + 1)/2$ qui n'est pas un entier car n est pair.

(2) Non, par exemple si $a_1 = -1/2$ et $a_i = 1/2$ pour tout $i > 1$, alors si on retire a_1 la somme vaut $(n-1)/2$ qui est bien un entier, et si on retire l'un des a_i pour $i > 1$ alors la somme devient $(n-3)/2$ qui est entier.

Exercices lycée

Exercice 6. Un certain nombre d'élèves passent une épreuve de mathématiques. Si on dispose les tables pour former un carré, il y a aura 5 élèves qui n'auront pas de place. Par contre, si on forme un rectangle avec 7 rangées de plus que de colonnes, tous les élèves auront une place (et il n'y aura pas de place vide). Quel est le plus grand nombre d'élèves possible ? Justifiez votre réponse.

Solution de l'exercice 6 Notons n le nombre d'élèves, a le nombre de colonnes du carré et b le nombre de colonnes du rectangle. Alors $n = a^2 + 5 = b(b+7)$. On en déduit que $(2a)^2 + 20 = (2b)^2 + 2 \times 7 \times (2b) = (2b+7)^2 - 49$, ce qui donne $(2b + 2a + 7)(2b - 2a + 7) = 69$.

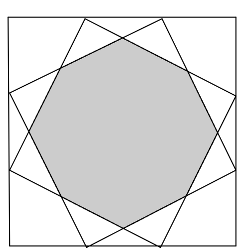
Notons $u = 2b + 2a + 7$ et $v = 2b - 2a + 7$. On constate que u et v sont des diviseurs de 69 tels que $uv = 69$ et $u > v$, donc ($u = 23$ et $v = 3$) ou ($u = 69$ et $v = 1$).

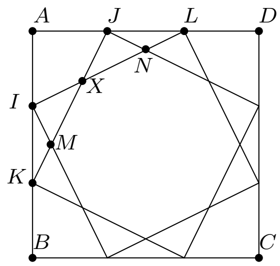
Dans le premier cas, on a $4a = u - v = 20$ donc $a = 5$, et $2b = u - 2b - 7 = 6$ donc $b = 3$ et $n = 30$.

Dans le deuxième cas, on a $4b = u - v = 68$ donc $a = 17$ et $2b = u - 2a - 7 = 28$ donc $b = 14$ et $n = 294$.

Conclusion : le plus grand nombre d'élèves possible est 294.

Exercice 7. Chaque côté d'un carré unité est partagé en 3 segments égaux. On trace la figure ci-dessous à partir de ce partage. Quelle est l'aire du polygone grisé ? Justifiez votre réponse.





Solution de l'exercice 7

Comme I et J sont les milieux de $[AK]$ et $[AL]$, (IJ) est parallèle à (KL) et $IJ/KL = 1/2$. Or, $XJ/XK = IJ/KL$ donc $XJ = KJ/3$. Ceci montre que la hauteur en X de XLJ est le tiers de la hauteur en K de KJA, donc vaut $2/9$. On en déduit que l'aire de XLJ et que l'aire de XJA valent $1/27$.

Un raisonnement similaire montre que $LN/LI = 1/4$, donc que l'aire de JNL vaut $1/72$, et l'aire de JXN vaut $\frac{1}{27} - \frac{1}{72} = \frac{5}{216}$.

L'aire de $AKXNJA$ est donc égale à $S(AKJ) + S(JXN) = \frac{1}{9} + \frac{5}{216} = \frac{29}{216}$. Le complémentaire dans le carré de la partie grisée étant la réunion de quatre parties d'aire $\dfrac{29}{216}$, son aire vaut $\dfrac{29}{54}$, et finalement l'aire de la partie grisée est égale à $1 - \dfrac{29}{54} = \dfrac{25}{54}$.

Exercice 8. On considère une suite de nombres réels $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tels que $a_1 = 1$, $a_2 = 7$ et

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n} \qquad \text{pour tout} \qquad n \geq 1.$$

Par exemple, $a_3 = \frac{7^2-1}{1} = 48$. Montrer que $9a_na_{n+1} + 1$ est le carré d'un nombre entier pour tout entier $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 8 En multipliant la relation par a_n, on trouve déjà

$$-1 = a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2. \tag{1}$$

En remplaçant n par $n+1$, il vient

$$-1 = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2. \tag{2}$$

On en déduit successivement $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$, puis $a_n(a_n + a_{n+2}) = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-1})$, puis

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n}.$$

Notons $x_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n}$. L'équation précédente s'écrit $x_{n+1} = x_n$, donc la suite (x_n) est constante. Comme $x_2 = 7$, on en déduit que $\dfrac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = x_{n+1} = 7$ pour tout n, autrement dit

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n.$$

Ceci permet déjà de voir que a_n est un entier strictement positif pour tout n.

En multipliant par a_n, il vient $7a_na_{n+1} = a_na_{n+2} + a_n^2 = a_{n+1}^2 - 1 + a_n^2$, donc $9a_na_{n+1} + 1 = a_{n+1}^2 + 2a_na_{n+1} + a_n^2 = (a_n + a_{n+1})^2$ est le carré d'un entier.

* * *