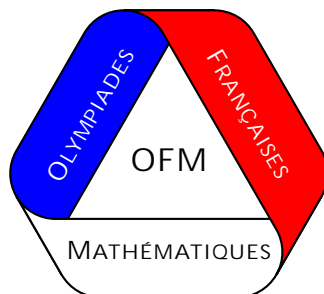


OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES



ÉPREUVE DE SÉLECTION

MERCREDI 2 OCTOBRE 2013

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- ▷ Il est **impératif** de rendre une feuille simple séparée sur laquelle vous écrirez votre nom, prénom, adresse email, nom de l'établissement et sa ville ainsi que votre classe.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Chacun des huit problèmes est noté sur 7. Il est possible de les traiter dans n'importe quel ordre mais ils sont essentiellement présentés dans l'ordre de difficulté croissante. **Les exercices 1 et 2 sont affectés d'un coefficient 1, et les exercices 3 à 8 d'un coefficient 2. Bien que le sujet soit commun, les seuils d'admission dépendront entre autres de la classe fréquentée par l'élève. Il est tout à fait possible pour un-e collégien-ne d'être admis-e, même sans avoir abordé plusieurs exercices.**
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Énoncés des exercices

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

N'oubliez pas de rendre une feuille simple séparée sur laquelle vous écrirez votre nom, prénom, adresse email, nom de l'établissement et sa ville ainsi que votre classe.

Exercice 1. Quel est le nombre d'entiers compris entre 1 et 10000 qui sont divisibles par 7 et non divisibles par 5 ?

Exercice 2. Au cours d'un certain nombre de jours, on a observé que chacun des jours où il a plu le matin, il a fait beau l'après-midi, et que chacun des jours où il a plu l'après-midi, il avait fait beau le matin.

Durant la période d'observation, il a plu lors de 15 jours, et il a fait beau 8 matins et 13 après-midis.

Combien de matins a-t-il plu ?

Exercice 3. On dispose de 100 ampoules, numérotées de 1 à 100, chacune pouvant être soit allumée soit éteinte. Ces ampoules sont reliées à trois commutateurs A, B et C.

En appuyant sur A, on change l'état de toutes les ampoules : celles qui étaient allumées s'éteignent, et celles qui étaient éteintes s'allument.

En appuyant sur B, on ne change l'état que des ampoules de numéros impairs.

En appuyant sur C, on ne change l'état que des ampoules de numéros de la forme $3n + 1$.

Au début de la soirée, toutes les ampoules étaient allumées. Mais, au cours de la fête et emporté par son enthousiasme, Igor a appuyé au total 1000 fois, de façon aléatoire, sur les commutateurs. Il se trouve qu'alors les ampoules portant les numéros 95 et 96 sont éteintes.

Combien d'ampoules sont encore allumées ?

Exercice 4. Quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 de rayons identiques r sont tangents intérieurement à un cercle de rayon R . On pose $C_5 = C_1$. On suppose que pour tout $i = 1, 2, 3, 4$, les cercles C_i et C_{i+1} sont tangents. Déterminer la valeur du rapport r/R .

Exercice 5. Dans un club de 100 membres, dans tout groupe de quatre personnes il y en a au moins une qui connaît les trois autres (si A connaît B alors B connaît A).

1) Prouver qu'il existe au moins un membre qui connaît tous les autres (un tel membre sera dit *populaire*).

2) Combien de membres populaires un tel club peut-il contenir ?

Exercice 6. Soit A, B, C et D quatre points distincts dans le plan. Il se trouve que tout cercle qui passe par A et B rencontre tout cercle qui passe par C et D.

Prouver que A, B, C et D sont alignés ou qu'ils sont tous sur un même cercle.

Exercice 7. Déterminer le plus grand nombre réel a et le plus petit nombre réel b tels que pour tous x, y, z positifs ou nuls on ait

$$a(x + y + z)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + yz \leq b(x + y + z)^2.$$

Exercice 8. Soit a un entier strictement positif, tel que a^3 possède 5 fois plus de diviseurs positifs que a .

Combien de diviseurs positifs possède a ?