OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DE SÉLECTION DU 2 OCTOBRE 2013– CORRIGÉ

Exercice 1. Quel est le nombre d'entiers compris entre 1 et 10000 qui sont divisibles par 7 et non par 5 ?

Solution de l'exercice 1

Il revient au même de chercher le nombre d'entiers compris entre 1 et 10000 qui sont divisibles par 7 et non par 35.

Parmi les entiers entre 1 et 10000, il y a 1428 entiers divisibles par 7 et 285 entiers divisibles par 35, donc la réponse est $1428 - 285 = 1143$. ■

Exercice 2. Au cours d'un certain nombre de jours, on a observé que chacun des jours où il a plu le matin, il a fait beau l'après-midi, et que chacun des jours où il a plu l'après-midi, il avait fait beau le matin.

Durant la période d'observation, il a plu lors de 15 jours, et il a fait beau 8 matins et 13 après-midis.

Combien de matins a-t-il plu ?

Solution de l'exercice 2

D'après l'énoncé, il n'a donc pas plu une journée entière durant la période considérée. Puisqu'il a plu 15 demi-journées et qu'il a fait beau 21 demi-journées, cela nous donne un total de 36 demi-journées, et permet d'affirmer que l'on s'intéresse en fait à une période de 18 jours.

Comme il a fait beau 8 des 18 matins, il y a donc eu 10 matins pluvieux. ■

Exercice 3. On dispose de 100 ampoules, numérotées de 1 à 100, chacune pouvant être soit allumée soit éteinte. Ces ampoules sont reliées à trois commutateurs A, B et C.

En appuyant sur A, on change l'état de toutes les ampoules : celles qui étaient allumées s'éteignent, et celles qui étaient éteintes s'allument.

En appuyant sur B, on ne change l'état que des ampoules de numéros impairs.

En appuyant sur C, on ne change l'état que des ampoules de numéros de la forme $3\mathsf{n} + 1$.

Au début de la soirée, toutes les ampoules étaient allumées. Mais, au cours de la fête et emporté par son enthousiasme, Igor a appuyé au total 1000 fois, de façon aléatoire, sur les commutateurs. Il se trouve qu'alors les ampoules portant les numéros 95 et 96 sont éteintes.

Combien d'ampoules sont encore allumées ?

Solution de l'exercice 3

Soit $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ les nombres respectifs de fois où Igor a appuyé sur les commutateurs $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$. On a donc $\mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c} = 1000$.

On remarque tout d'abord que d'appuyer un nombre pair de fois sur un même commutateur en annule l'effet.

Puisque 96 est pair et n'est pas de la forme $3\mathsf{n} + 1$, l'état de l'ampoule de $\mathsf{n}°96$ est ainsi déterminé par la parité de a. Comme cette ampoule est éteinte, c'est que a est impair.

De même, 95 est impair et n'est pas de la forme $3\mathsf{n} + 1$, l'état de l'ampoule de $\mathsf{n}°95$ est ainsi déterminé par la parité de $\mathsf{a} + \mathsf{b}$. Comme cette ampoule est éteinte, c'est que $\mathsf{a} + \mathsf{b}$ est impair. Puisqu'on vient de voir que a est impair, c'est donc que b est pair.

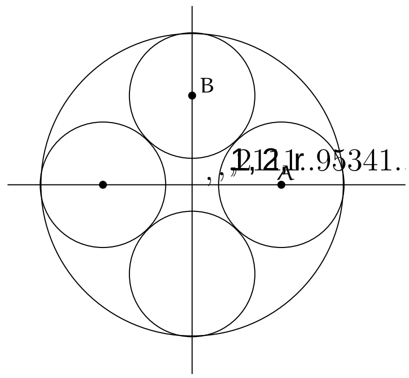
De $\mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c} = 1000$, on déduit alors que c est impair.

Ainsi, les ampoules sont dans le même état que si Igor avait appuyé sur les commutateurs A puis C, c'est-à-dire s'il avait éteint toutes les ampoules puis rallumé celles portant les numéros $3\mathsf{n} + 1$ ($\mathsf{n} = 0, 1, 2, \ldots, 33$). Il reste donc 34 ampoules allumées.

■

Exercice 4. Quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 de rayons identiques r sont tangents intérieurement à un cercle de rayon R. On pose $C_5 = C_1$. On suppose que pour tout $i = 1, 2, 3, 4$, les cercles C_i et C_{i+1} sont tangents. Déterminer la valeur du rapport $\frac{r}{R}$.

Solution de l'exercice 4



Dans ce cas, il y a donc 98 ou 97 membres populaires. Il est facile de vérifier que l'on peut construire des clubs adéquats pour chacune de ces deux possibilités.

Ainsi, un tel club contient 97 ou 98 ou 100 membres populaires.

$\blacksquare$

Exercice 6. Soit $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ et D quatre points distincts dans le plan. Il se trouve que tout cercle qui passe par A et B rencontre tout cercle qui passe par C et D.

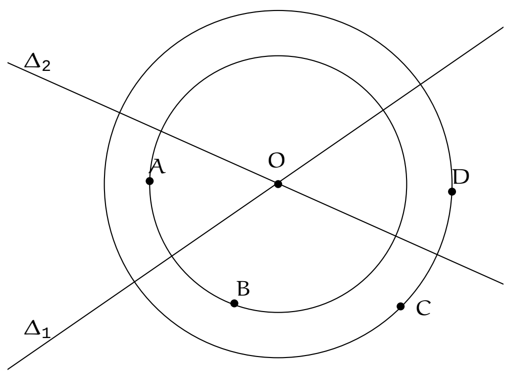
Prouver que $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ et D sont alignés ou qu'ils sont tous sur un même cercle.

Solution de l'exercice 6

Par l'absurde : supposons que les quatre points ne soient ni alignés ni cocycliques.

Soit Δ_1 la médiatrice de $[\mathsf{AB}]$, et Δ_2 celle de $[\mathsf{CD}]$.

S'il existe un point O commun à Δ_1 et Δ_2 : on note $_1$ le cercle de centre O et de rayon OA, et $_2$ le cercle de centre O et de rayon OC. Bien entendu, on a $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in {}_1$ et $\mathsf{C}, \mathsf{D} \in {}_2$.

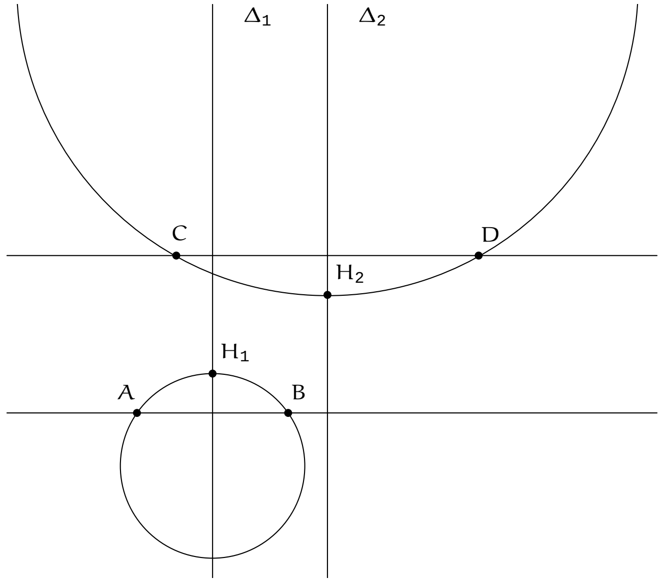


On ne peut avoir $\mathsf{OA} = \mathsf{OC}$ sans quoi les cercles $_1$ et $_2$ seraient confondus et les points $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}$ seraient cocycliques, en contradiction avec notre hypothèse.

Donc, les cercles $_1$ et $_2$ sont concentriques et de rayons différents. Mais alors, on a trouvé un cercle qui passe par A et B, et un cercle qui passe par C et D, qui ne s'intersectent pas. Cela contredit les données de l'énoncé.

On en déduit que les droites Δ_1 et Δ_2 n'ont pas de point commun, et sont donc parallèles. Par suite, les droites (AB) et (CD) sont parallèles (et distinctes, puisque les quatre points sont supposés non alignés).

Soit $\mathsf{d} > 0$ la distance entre les droites (AB) et (CD). Soit H_1 le point de Δ_1 situé dans la bande délimitée par (AB) et (CD) et à une distance $\frac{\mathsf{d}}{4}$ de (AB). Le point H_2 est défini de façon analogue vis-à-vis de (CD).



Alors, les cercles ${}'_1$ et ${}'_2$, qui passent respectivement par les points A, B, H_1, et par les points C, D, H_2, ne se rencontrent pas, ce qui contredit à nouveau les données de l'énoncé.

Et finalement, les points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques.

$\blacksquare$

Exercice 7. Déterminer le plus grand nombre réel a et le plus petit nombre réel b tels que pour tous x, y, z positifs ou nuls on ait

$$a(x+y+z)^2 \leqslant x^2+y^2+z^2+yz \leqslant b(x+y+z)^2.$$

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

Commençons par b. Pour $x = y = 0$ et $z = 1$, on constate que si b convient on doit avoir $b \geqslant 1$. Réciproquement, pour tous x, y, z positifs ou nuls, on a

$$x^2+y^2+z^2+yz \leqslant x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy = (x+y+z)^2,$$

ce qui prouve que $b = 1$ convient effectivement. Le plus petit nombre réel b qui convient est donc $b = 1$.

Pour x, y, z positifs ou nuls, on pose $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2+yz$. On constate alors que

$$\begin{aligned} f(x,y,z) - f(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}) &= y^2+z^2+yz-3(\frac{y+z}{2})^2 \\ &= \frac{1}{4}(y^2+z^2-2yz) \\ &= \frac{1}{4}(y-z)^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $f(x,y,z) \geqslant f(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2})$. Puisque $x+y+z = x + \frac{y+z}{2} + \frac{y+z}{2}$ cela assure que, sans perte de généralité, on peut se restreindre aux triplets de la forme (x, y, y), avec x, y positifs ou nuls. L'inégalité étudiée devient $a(x+2y)^2 \leqslant x^2+3y^2$. Or, si $x=y=0$, cette inégalité est clairement vraie quelle que soit la valeur de $a \geqslant 0$.On suppose donc que $(x,y) \neq (0,0)$. Puisque l'inégalité est homogène, toujours sans perte de généralité, on peut maintenant imposer que $x+2y=1$. Il s'agit donc de trouver le plus grand réel a tel que, pour tout $y \in [0,1]$, on ait $a \leqslant (1-2y)^2+3y^2$. Or, on a

$$(1-2y)^2+3y^2 = 7y^2-4y+1 = 7\Big(y-\frac{2}{7}\Big)^2+\frac{3}{7},$$

donc $(1-2y)^2+3y^2 \geqslant \frac{3}{7}$, avec égalité si et seulement si $y=\frac{3}{7}$. Finalement, le plus grand nombre réel a qui convient est $a=\frac{3}{7}$.

■

Exercice 8. Soit a un entier strictement positif, tel que a^3 possède 5 fois plus de diviseurs positifs que a.

Combien de diviseurs positifs possède a ?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

Comme les diviseurs de 1^3 sont exactement les mêmes que ceux de 1, on doit avoir $a \geqslant 2$. Soit alors $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de a, avec $\alpha_i \geqslant 1$ pour tout i. sLe nombre de diviseurs positifs de a est donc $(\alpha_1+1)\times\cdots\times(\alpha_k+1)$. De plus, la décomposition en facteurs premiers de a^3 est alors $a^3 = p_1^{3\alpha_1}\cdots p_k^{3\alpha_k}$, et le nombre de diviseurs positifs de a^3 est donc $(3\alpha_1+1)\times\cdots\times(3\alpha_k+1)$. Ainsi, la condition de l'énoncé se traduit par

$$(3\alpha_1+1)\times\cdots\times(3\alpha_k+1) = 5(\alpha_1+1)\times\cdots\times(\alpha_k+1). \qquad (1)$$

Or, il est facile de vérifier que si $x \geqslant 1$, on a $3x+1 \geqslant 2(x+1)$. On a donc $(3\alpha_1+1)\times\cdots\times(3\alpha_k+1) \geqslant 2^k(\alpha_1+1)\times\cdots\times(\alpha_k+1)$, et si l'on veut réaliser (1), il faut donc que $2^k \leqslant 5$. Comme k est un entier strictement positif, c'est donc que $k=1$ ou $k=2$.

Pour $k=1$, l'égalité (1) se résume à $3\alpha_1+1 = 5\alpha_1+5$, qui est clairement impossible.

Pour $k=2$, l'égalité (1) s'écrit $(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1) = 5(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)$ qui, après développement conduit à $2\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_1\alpha_2+4=0$, ou encore $(2\alpha_1-1)(2\alpha_2-1)=5$. Or, chacun des deux facteurs du membre de gauche sont des entiers strictement positifs et 5 est premier. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, et il vient $2\alpha_1-1=1$ et $2\alpha_2-1=5$, ou encore $\alpha_1=1$ et $\alpha_2=3$.

Et finalement, a possède exactement 8 diviseurs positifs. ■